## 15. KOORDINATE U VEKTORSKOM PROSTORU

Svaka baza vektorskog prostora V naziva se i koordinatni sistem tog prostora. Akko je B={$b_1$,$b_2$ …b
k
}
jedna baza prostora V, tada se proizvoljan vektor x
Î
V može na jedinstven način prikazati u obliku linearne kombinacije vektora baze B tj.

$a=x_1b_1+x_2b_2…+x_nb_n$ ili uobičajenije $x=(x_1, x_2,…x_n)_B$ Za ovakav vektor kažemo da je prikazan u koordinatnom obliku. Skalari $x_1, x_2,…x_n$ nazivaju se koordinate vektora u bazi B. Operacije u V sa vektorima u koordinatnom obliku pišu se prema sledećim pravilima:

$(x_1, x_2,…x_n)_B + (h_1,h_2,…h_n)_B = (x_1+h_1, x_2+h_2, … x_n+h_n$

$a(x_1, x_2,…x_n)_B=(ax_1 , ax_2 , …ax_n)_B$

Neka je x={$x_1$,$x_2$,...$x_n$} podskup n-dimenzionog vektorskog prostora V. Neka su vektori iz x zadati kao matrice vrste i neka je T matrica obrazovana od onih matrica vrsta, tada je skup x linearno nezavistan akko je rang T=m.

## 16. LINEARNI OPERATORI

Neka su U i V vektorski prostor nad istim poljem k i neka je dato preslikavanje A: U®V.

Preslikavanje A se naziva binarni operator prostora U i prostora V, ako su ispunjeni uslovi:
A(x+y)= Ax+Ay i A(
a
x)=
a
Ax. Za svako x,y
Î
V i
"
a
Î
k skup svih ovih linearnih operatora označavamo sa Hom(U,V). Za operator A
Î
Hom(U,V) kažemo da je operator vektorskog prostora V.

Za vektorske U,V,W važe sledeća pravila:

1. Ako A,BÎHom(U,V) onda A+BÎ Hom(U,V)

2. Ako AÎHom(U,V) i IÎk onda IAÎHom(U,V)

3. Ako AÎHom(U,V) i BÎHom(V,W) onda BAÎHom(U,W)

Ako su U i V vektorski prostori nad poljem k i B=($b_1$,$b_2$,…$b_n$) baza prostora u svako preslikavanje f:B ®V može se na jedinstven način produžiti u binarni operator prostora U u prostor V.

**17. LINEARNI OPERATORI**

Neka je A linearni operator vektorskog prostora U u vektorskom prostoru V skup svih xÎU takvih da je Ax=0 naziva se jezgro lin. operatora A. Ako je A lin. operator vektorskog prostora V, onda je A podprostor prostora V.

Dokaz:

Neka su $V_1$,$V_2$Î$A_n$ tada postoje $n_1$ ,$n_2$ÎU takvi da je $V_1$Î$A_{n1}$, $V_2$Î$A_{n2}$. Pošto je A($a_{n1}$)= a $A_{n1}$= a$U_1$ i A(
x
n2
)=
x
A
n2
=
x
n2

Imamo:

A($a_{n1}$+$x_{n2}$)= $a_{n1}$+$x_{n2}$ odakle sledi:

$a_{n1}$+$x_{n2}$Î$A_n$

Dimenzija vekt. prostora $A_n$ naziva se rang lin. operatora i označava se sa “rang A”.

## 18. SPECIJALNI OPERATORI

Neka je linearni operator unitarnog vektorskog prostora V. Operator $A^*$ definisan jednakošću (Ax,y)=(x,A $^*$y), "x,yÎ V naziva se operator odjungovan operatoru A. Za dati lin. operator A postoji jedan i samo jedan odjungovan operator A
*
. Za A i B linearne operatore unitarnog vektorskog prostora V važi:

1. $A^*$Î Hom(U,V)

2. $(A^*)^*=A$

3. $(aA)^*= aA^*$

4. $(A+B)^*=A^*+B^*$

5. $(AB)^*=B^*A^*$

mat $A^*=(\text{mat } A)^T$. $A^*$ je odjungovana matrica A ako je $A^*=A^T$. Neka je A lin. operator unitarnog vektorskog prostora V, ako je operator A
*
tj. ako važi:

$AA^*=A^*A$ onda A nazivamo normalan operator. Neka je A lin. operator unitarnog vektorskog prostora V operator A naziva se unitaran ako za "x,yÎV važi: (x,y)=(Ax,Ay).

Da bi lin. operator A bio unitaran potrebno je i dovoljno da bude $A^*=A^{-1}$ tj. $A^*A= AA^*$ unitarni operator je i normalan.

## 19. JEZGRO I SLIKA LINEARNOG OPERATORA

Neka je A lin. operator vektorskog prostora U i vektorski prostor V. Skup svih aÎU takvih da je Ax=0 naziva se jezgro li. operatora i označava se sa kerA (kerner). Ako je A lin. operator vektorskog prostora U i vektorski prostor V onda je kerA podprostor prostora U. Defekt lin. operatora A u oznaci defA jeste dimenzija njegovog jezgra tj. defA=dim(ker A). Neka je A lin. operator vektorskog prostora U i vektorski prostor V. Slika prostora U u oznaci AU jeste skup AU= {AUïuÎU}ÍV
.

Ako je A lin. operator vektorskog prostora U i vekt. prostor V, onda je AU podprostor U. Dimenzija vekt. prostora AU naziva se rang lin. operatoraA i označava se sa rang A.

dim U = rang A + def A.

## 20. INVERZNI OPERATORI

Neka je A lin. operator vekt. prostora V, kažemo da A ima inverzan operator ako postoji preslikavanje: $A^{-1}$:V®V takvo da za svaki vektor xÎV važi: $A^{-1}(Ax)=A(A^{-1}x)=x$.

Lin. operator A vekt. prostora V ne može imati više od jednog inverznog operatora. Inverzni operator je takođe lin. operator. Lin. operator A vekt. prostora V ima inverzan operator $A^{-1}$ ako jednačina Ax=y ima jedinstveno rešenje po x za svako y
Î
V. Da bi lin. operator A vekt. prostora V imao inverzan operator A
-1
potrebno je i dovoljno da bude detA=0. Potreban i dovoljan uslov da bi lin. operator A imao inverzni operator A
-1
jeste da matrica tog operatora u odnosu na proizvoljnu bazu prostora V bude regularna.

## 21. SOPSTVENE VREDNOSTI LINEARNOG OPERATORA

Ako je A lin. operator vekt. prostora V nad poljem k, vektor xÎV (x¹0) nazivamo sopstveni vektor lin. operatora. Ako postoji skalar x

Î
k takav da je Ax=
l
x skalar
l
naziva se odgovarajuća sopstvena vrednost.

Sopstveni vektori lin. operatora A koji odgovara različitim sopstvenim vrednostima, linearno su nezavisni. Ako je l sopstvena vrednost lin. operatora A onda je:$a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} + \ldots a_1 l + a_0$ (Kej – Hamiltonova teorema).

Svaka matrica A je nula svog polinoma, tj. ako je: def(A-lI)=$a_n x^n + a_{n-1} l^{n-1} + \ldots + a_1 l + a_0$, onda je: $a_n$ A
n
+a
n-1
A
n-1
+…+a
1
A+a
0
I=0. Svaki lin. operator A vekt. prostora V ima jedan i samo jedan minimalan polinom i on je delitelj karakterističnog polinoma.

## 22. UNITARNI VEKTORSKI PROSTOR

Za V kažemo da je unitarni vektorski prostor ako je definisano preslikavanje koje zadovoljava sledeće uslove:

- (x,y)=(y,x)

- (ax,y)=a(x,y)

- (x+y,z)=(x,z)+(y,z)

- (x,x)³0, (x,x)=0 akko x=0

Za proizvoljne vektore x,y,zÎV i proizvoljan skalar aÎk, skalar (x,y) nazivamo skalarni proizvod vektora x i y. Ako je k ÍR kažemo da je V realan unitaran prostor. Preslikavanje skupa V u skup R

0
+
koje svakom vektoru x
Î
V dodeljuje nenegativan realan broj u oznaci
|
|
x
|
|
=
Ö
xx naziva se norma vekt. prostora.

Za normu važi nejednakost |(x,y)|£ ||x||×||y|| (Koši-Švarcova nejednakost). Za normu važi i:

- ||x||>0

- ||x||=0 ako x=0

- $||ax_1||=|a|\ ||x||$

- $||x+y||=||x||+||y||$

U unitarnom vekt. prostoru V važi nejednakost paralelograma: $||x+y||^2+||x-y||^2=2(||x||^2+||y||^2)$

**23. ORTOGONALNOST**

Za vektore x i y u unitarnom vektorskom prostoru V kažemo da su ortogonalni ako je (x,y)=0. Kaženmo da je skup vektora $\{x_1,x_2,...x_n\}$ unitarnog vektorskog prostora V ortogonalan ako su svaka dva različita vektora iz tog prostora ortogonalna. Ortogonalan skup vektora različitih od nule linearno je nezavistan.

Svaki unitarni vektorski prostor ima ortogonalnu bazu $\{b_1,b_2...b_n\}$. $c_1=b_1$; $c_2=b_2+ac_1$ Skalar a binoma (c

2

,c

1

)=0

$0=(c_2,c_1)=(b_2++ac_1,c_1)=(b_2,c_1)+ a(c_1+c_2)$

$a=-((b_2,c_1)/( c_1,c_1))=-(( b_2,b_1)/(b_1,b_1))$

Pod pretpostavkom da su određeni ortogonalni vektori $c_1,c_2...c_{n-1}$ i $c_k=b_k+a_1c_1+a_2c_2+...+a_{k-1}c_{k-1}$ izborom skalara $a_1$, $a_2$ ... $a_{k-1}$ tako da $c_k$ bude ortogonalna sa vektorima $c_1,c_2...c_{k-1}$ tako da $(c_k,c_i)=0$ imamo: $0=(c_k,c_i)= (b_k+a_1c_1+... a_ic_i+...+a_{k-1}$

$c_{k-1}c_i)=(b_k,c_i)+a_i(c_i,c_i)$

Þ

$a_i=-((b_k,c_i)/(c_i,c_i))$

## 24. LINEARNE FUNKCIONELE

Lin. funkcionele L nad podprostorom V je preslikavanje skupa V u skup K za koji važi:

L(ax+xy)=aLx+xLy, gde je x,yÎV; a,xÎK.

U n-dimenzionalnom prostoru V linearna funkcionela L ima reprezentaciju: $Lx=Sa_ix_i$ gde su $x_1,x_2,\ldots$

$x_n$ koordinate vektora x u odnosu na bazu B, a $a_1$, $a_2$,... $a_n$ su skalari koji zavise od vektora x.

Linearna funkcionela L na unitarnom vektorskom prostoru V ima reprezentaciju: Lx=(x,a) gde je aÎV vektor jednmoznačno određen funkcionelom L.

Dokaz:

$Lx=Sa_ix_i$

$x=[x_1,x_2,...x_n]_B$

$a=[a_1, a_2,... a_n]_B$

$(x,a)=a_1x_1, a_2x_2,..., a_nx_{n.}$

**25. NORME VEKTORA I MATRICA**

Neka je V podprostor nad poljem K i m:V®R. m se naziva vektorska norma, ako važi:

1) m(x)³0 "xÎV

2) m(ax)£|a|m(x) "aÎK, xÎV

3) m(x+y) £m(x)+m(y)  x,yÎV

Jedna klasa vektorskih ravni definisana je sa:

Norma $||\cdot||_1$ naziva se 1-norma, apsolutna

Norma $||\cdot||_2$ naziva se 2-norma, sferna

Norma $||\cdot||_3$ naziva se 3-norma, maksimum

Za dve vektorske norme $m_1$,$m_2$ postoje pozitivne konstante m i M takve da za svaki vektor x važi: m m $_1$(x)£m$_1$(x)£Mm$_1$(x)

Neka je m:k$^{n,n}$®R tada je m matrična norma ako važi:

1) m(A)³0 "AÎk$^{n,n}$

m(A)=0 ako A=0

2) m(aA)= |a|m(A) "aÎK, AÎk$^{n,n}$

3) m(A+B)£m(A)+m(B) "A,BÎK$^{n,m}$

4) m(AB)£m(A)m(B) "A,BÎK$^{n,m}$

Za matričnu normu || || k$^{n,m}$ kažemo da je saglasna sa vektorskom normom ako:

||Ax||£||A|| ||x||$_{¥}$

||A||=sup (||Ax||/||x||)

**26. KONGRUENCIJA VEKTORA I MATRICA**

Niz vektora $x^{(k)}$=[$x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$,… $x_n^{(k)}$]k=1,2,… kongruencija ka vektoru x=[$x_1$,$x_2$…$x_n$] akko je &quot
; i
i=1,2,…n

Vektor x nazivamo graničnu vrednost niza $x_i^{(k)}$ (i=1,2,…) i pišemo lim $x^{(k)}$=x

Niz matrica $A^{(k)}=[a_{ij}]^{(k)}_n$ (k=1,2…) konvergira ka $A=[a_{ij}]_n$ akko "i,j važi: lim $a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$

Matrica A naziva se granična vrednost niza $A^{(k)}$ (k=1,2…) i pišemo lim $A^k=A$

Red vektora $x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots+x^{(n)}+\ldots$ je konvergentan akko postoji lim $(x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots+x^{(k)})$ nad k®¥ i to granična vrednost se naziva suma datog reda. Analogno se definiče kongruencija reda matrica. Neka je A
(k)
konvergentan niz matrica lim A
k
=A, ako je b vektor, B matrica, onda je:

lim $(A^{(k)}b)=Ab$

lim $(A^{(k)}B)=AB$

lim $(BA^{(k)})=BA$

**27. DIREKTNI POSTUPCI**

To su postupci kod kojih se posle konačnog broja računskih operacija, ukoliko nema grešaka zaokruživanja, dolazi do rešenja. Dva sistema linearnih jednačina su ekvivalentna ako je svako rešenje prvog rešenja i drugog. Elementarne transformacije sistema linearnih jednačina su:

1) zamena dve jednačine

2) množenje jedne jednačine brojem različitim od nule

3) dodavanje jedne jednačine množene nekim brojem u drugoj jednačini

Primenom elementarnih transformacija dobija se ekvivalentan sistem. Najvažniji direktan postupak za rešavanje lin. jednačina je Gaus-Zajdelov postupak. Elementarnim transformacijama sistem Ax=D se transformiše u sistem matrice. Gde je gornja trougaona matrica reda 5 sa elementima na glavnoj dijagonali različitim od nule.

$u \times c_1 + v \times c_2 = b_1$

$0c_1 + 0c_2 = b_2$

**28. ITERATIVNI POSTUPCI**

Postupci za rešavanje sistema lin. jednačina. Deliimo ih u dve grupe: direktne i iterativne. Kod iterativnih postupaka rešenje sistema lin. jednačina se dobija kao granična vrednost jednog beskonačnog niza vektora.

- Imamo sistem jednačina Ax=b gde je A=$[a_{ij}]_n$ regularna matrica, b=b$[b_i]_n$. Sistem Ax=b se može napisati u obliku ekvivalentnog sistema x

n+1

=mx

n

+d gde je m kvadratna matrica, a d je n-dimenzionalni vektor.

- Polazeći od sistema $x_{n+1}$=m$x_n$+d sa početnim vektorima $x^0$Î$R^k$ obrazujemo niz vektora $x^0$, $x^{(1)}$,. ..x

(k)

prema formuli: x

(k+1)

=mx

(k)

+d, (k=o,1,2...n) ova formula se naziva iterativno pravilo a za svako fiksno “k” predstavlja iterativan korak.

- Matrica A iz sistema Ax=b se može napisati i u obliku A=N-P. Tada imamo: Nx=Px+b ova formula definiše dalji iterativni postupak: $x^{(k+1)}=n^{-1}Px^{(k)}+n^{-1}b$ Gaus-iterativni postupak

Takođe imamo tj. postoji i Fokobijev koji je sličan prethodnom.

**29. SOPSTVENE VREDNOSTI I VEKTORI MATRICA**

Ako je data kvadratna matrica A treba odrediti sve skalare l i nenula vektor x tako da važi: Al=lx

l

-sopstvena vrednost matrice A, x-nenula vektor, sopstveni vektor matrice koji odgovara sopstvenoj vrednosti.

Sopstvene vrednosti matrice A su nule karakterističnog polinoma matrice A. det(A-II)=0. Ako je I sopstvena vrednost matrice A onda homogeni sistem matričnih jednačina (A-
I
I)=0 imamo bar jedno netrivijalno rešenje x i svako takvo rešenje je sopstveni vektor matrice A: koji odgovara sopstvenoj vrednosti
I
. Postupak za određivanje koeficijenta karakterističnog polinoma date matrice.

0 je $A=[a_{ij}]_n$ ako je $f(x)=x^n+b_{n-1}\,x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$ karakterističan polinom matrice A onda na osnovu Kejli-Hamiltonove teoreme imamo:

$b_nA^ny+b_{n-1}A^{n-1}y+\ldots b_1A^1y+b_0y=o$

Rešavanjem ovog sistema mogu se dobiti koeficijenti karakterističnog polinoma matrice A.

## 30. OSNOVNI POJMOVI O GRAFU

Neka je V neprazan skup i r binarna relacija na V. Uređeni par G=(V, r) naziva se graf. Elementi skupa V jesu čvorovi, a elementi skupa
r
jesu grane grafa. Čvorovi a i b su krajevi grane (a,b). Svaka grana n=(a,b) naziva se orijentisana grana koja izlazi iz čvora a, a ulazi u čvor b.

Grana n(a,b) je sused na čvoru a i izvoru b. Čvor koji nije susedan nijednoj grani je izolovan čvor. Ulazni stepen čvora jednak je broju grana koje ulaze u čvor, izlazni stepen broju grana koje izlaze. Dva grafa $G_1$=($V_1$, $r_1$) i $G_2$=($V_2$, $r_2$) su izomorfni ako postoji bijekcija: f:$G_1$®$G_2$ takvo da je: (
"
a,b
Î
V
1
)(a,b)
Î
r
1
Û
(f(a), f(b))
Î
r
2
.

## 31. POVEZANOST GRAFOVA

Put S dužine k u grafu jeste svaki niz grana $n_1$,$n_2$,…$n_k$ koji ima sledeće osobine:

1) Grana $n_1$ prolazi iz proizvoljnog čvora grafa

2) Grana $n_i$ (i=1,2,…k) počinje u onom čvoru u kojem se završava grana $n_{i-1}$. Put koji se završava u istom čvoru u kojem i počinje nazive se kružni put.

Ako put povezuje čvor a sa b i ako je a početni ,a b krajnji onda su čvorovi a i b povezani. Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je nepovezan. Nepovezan graf se sastoji od dva ili više odvojena dela, koji se nazivaju komponente povezanosti grafova. Svaki neorijentisani graf je unija svojih komponenti povezanosti. Artikulacioni čvor grafa je čvor čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenti povezanosti grafa. Blok grafa je svaki njegov maksimalno povezan podgraf bez artikulacije čvorova.

**32. STABLO**

Povezan, neorijentisan graf koji ne sadrži konture naziva se stablo. Svaka dva čvora u stablu T spojena su jedinstvenim elementarnim putem. Svako stablo ima bar dva viseća čvora i bar jednu viseću granu. Svaki povezan i neorijentisan graf bez petlji sadrži delimičan graf oblika stabla. Da bi povezan graf bio stablo, potrebno je i dovoljno da broj njegovih grana bude za jedan manji od broja čvorova.

**33. PLANIRANI GRAFOVI**

Ako se graf G može nacrtati u ravni tako da mu se grane ne seku kažemo da je to planarni graf, tj. planirani graf se može predstaviti na ravni tako da samo čvorovi budu zajedničke tačke grana i to samo čvorovi koji su na krajevima tih grana.

Ako se planirani graf ovako predstavi u ravni onda on deli ravan na više konačnih otvorenih oblasti i jednu beskonačnu oblast.

Povezan planirani graf sa n čvorova i m grana deli ravan m-n+2 oblasti. U planarnom grafu postoji bar jedan čvor stepena manjeg od 6.