1. EKVIVALENTNOST

Binarna relacija na skupu S jeste svaki podskup S^2. Neka je j binarna relacija na skupu S, tada kažemo da je x u relaciji sa y u oznaci x
j
y ako (x,y)
Î
S. Neka je
j
binarna relacija na skupu S inverzna relacija relacije
j
jeste binarna relacija
j
-1
definisana sa

a
j
-1
b
Û
b
j
a, komplement relacije
j
jeste binarna relacija
j
definisana sa
j
=S
2
/
j
za relaciju
j
na skupu S kažemo da je:

- refleksivna akko "aÎS i aja

- antirefleksivna akko "aÎS i ù(aja)

- simetrična akko ajb Þ bja

- antisimetrična akko ajb Ù bja Þ a=b

- tranzitivna akko ajb Ù bjc Þ a=c

Relacija j je relacija poredka na S ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

2. UREĐENI SKUPOVI

Za svako S na kome je definisano uređenje ≤ kažemo da je uređen skup i označavamo ga sa (S, ≤).

Za uređenje ≤ u skupu S kažemo da je potpuno, ako za svako x,yÎS važi samo jedan od sledećih uslova x< y, x=y, x> y . U suprotnom uređenje je delimično

.

Neka je (S,≤) uređen skup i AÍS. Ako postoji element u_oÎA takav da je ya svako aÎA, n_o=a kažemo da je
u
o
najmanji element skupa A. Za podskup A uređenog skupa
(S,
≤
) kažemo da je majoriran (ograničen odozgo) u S ako postoji m
Î
S takvo da je (
"
a
Î
A), a
≤m. podskup A je minariran u S ako postoji
m
Î
S takvo da je (
"
a
Î
A),
m ≤
a.

Neka su S i S' dva uređena skupa, a f:x®x' preslikavanje S u S'. Za ovo preslikavanje kažemo da je monotono ako x≤y Û f(x) ≤f(y). Neka je f izomorfizam iz S u S'. Ako je
A
Í
S i A'=f(a) onda je element m'=f(m) minimalan (maksimalan), minoranta (majoranta), najmanji (najveći), infimum (supermum).

3. MREŽE

Za uređeni skup (S,≤) kažemo da je mreža ako svaki njegov ekvivalentni podskup ima infinum i supermum. Ako je S mreža onda za "x,y,zÎS važi:

1. xÙa=a xÚx=x idempotentost

2. xÙy=yÙx xÚy=yÚx komutativnost

3. xÙ(yÙz)=(xÙy)Ùz

xÚ(yÚz)=(xÚy)Úz asocijativnost

4. xÙ(xÚy)=x=(xÙy)Úx apsortivnost

Mreža je distinktivna ako važi bar jedan od sl. uslova:

("x,y,zÎS)

xÙ(yÚz)= (xÙy)Ú (xÙz)

xÚ (yÙz)= (xÚy) Ù (xÚz)

neka je S uređeni skup. Najmanji element skupa obično se naziva nula (0), onaj veći jedinica (1). Mreža S sa nulom i jedinicom naziva se mreža komplementima ako za ("aÎS) postoji $

b
Î
S takvo da važi a
Ú
b=1, a
Ù
b=0.

U distinktivnoj mreži komplement je jednoznačno određen i označavamo ga sa ùa. Distinktivna mreža sa komplementima naziva se Bulova algebra.

4. GRUPOIDI

Binarna operacija u skupu G jeste preslikavanje f skupa GxG u skup G. Uređen par (G,f) nazivamo grupoid a kordinatni broj (G) skupa G – red grupoida. Slika f(x,y) najčešće se piše u obliku proizvoda tj. (x,y)®x+y i kažemo da je (G,0) multiplikativna a (G,+) aditivan grupoid.

Za elemente x,y grupoida G kažemo da su komutativni ako važi xy=yx. Grupoid u kome su svaka dva elementa komutativna naziva se komutativni grupoid. U grupoidu postoji najviše jedna jedinica.

Polugrupa sa jedinicom: monoid. Za element a grupoida G kažemo da je skrativ ako ax=ay Ù
xa=ya
Þ
x=y. Grupoid sa skrativim elementima – grupoid je sa skraćivanjem.

Grupoid G je kvazigrupa ako za date a,bÎG pošto je jedinično određeni element x,yÎG takvi da je ax=b Ù
ya=b. tj. (
"
a,b
Î
G) (
$

! x,y
Î
G) ax=b
Ù
ya=b

Svaka kvazigrupa je grupoid sa skraćivanjem. Grupoid G grupa akko je podgrupa i kvazigrupa.

Grupoid j(G) je: komutativan

grupoid sa jedinicom

polugrupa

Akko ima određenu osobinu i na G.

5. HOMOMORFIZMI I KONGRUENCIJA GRUPOIDA

(G,o) i (G,*) su dva grupoida i f preslikavanje skupa g u skup G. Za preslikavanje f kažemo da je homomorfizam grupoida G u grupoid G' ako važi: ("x,yÎG) f(x)*f(y)

Za homomorfizam kažemo da je monomorfizam ako je f injekcija a epimorfizam ako je f surjekcija. Homomorfizam koji je monomorfizam i epimorfizam naziva se izomorfizam.

Za grupoid G' kažemo da je homomorfna slika grupoida G ako postoji epimorfizam iz G u G''. Ako je grupoid G grupoid sa skraćivanjem i kvazigrupa onda i odgovarajuću osobinu ima i svaki izomorfni grupoid G'. Neka je G grupoid i a ekvivalent na G. Ze realizaciju kažemo da je kongruencija u grupoid G ako je a saglasna sa operacijom grupoida G tj. ako a
a
x i b
a
y onda ab
a
xy. Ako je f homomorfizam iz grupoida G u grupoid G' onda je jezgro
a
=kon
a
u G a kanoničko preslikavanje k:
a
a
®
f(a). Ako je epimorfizam iz grupoida G u grupoid G' onda su grupoidi G/ kon
a
u G' izomorfizam.

6. PODGRUPE

Nepoznati podskup H grupoida G naziva se podgrupa grupoida G ako i samo ako a,bÎHÞabÎH. Ko je grupoid G podgrupa onda je svaki njegov podgrupoid i podpolugrupa.

Ako je G grupa sa jedinicom e i f=HÍG sledeći izrazi su ekvivalentni:

a) H je podgrupa grupe G

b) eÎH, a,bÎHÞa^{-1}; abÎH

c) a,bÎHÞab^{-1}ÎH

Dokaz:

H je grupa a,bÎHÞabÎH. Neka je q jedinica grupe H. eq=q=q×qÞe=q, eÎH. a^{-1} je inverzni element za a u grupi H. Ako je a
-1
inverzni el. a u G: a
×
a
1
=e=aa
-1
važi pod b) e
Î
H. Ko a,b
Î
H onda a,b
-1
Î
H i ab
-1
Î
H jer važi pod a).

Ako je G grupoid i HÍG onda je H polugrupoid u G ako i samo ako je HHÍG. Uslov a,bÎHÞabÎH ekvivale- ntan je uslovu HH
Í
G. Neka je H neprazan podskup grupe G tada su sl. Iskazi ekvivalentni:

1. H je podgrupa u G

2. H^{-1}ÍH i HHÍH

3. HH^{-1}ÍH

7. NORMALNE PODGRUPE

Podgrupe kod kojih je ("xÎG) xH=Hx nazivaju se normalne podgrupe. Jednačina podgrupe E= {e} I samo grupa G normalne su podgrupe grupe G.

Ako je G komutativna grupa onda je I svaka njena podgrupa normalna. H je normalna podgrupa grupe G ako je: ("xÎG) $x^{-1}Hx=H$

<u>Dokaz:</u>

Neka je H norm. podgrupa i tada prema:

"xÎG, xH=Hx imamo

$H=eH=(x^{-1}\times x)H= x^{-1}(xH)= x^{-1}Hx$

Ako je H normalna podgrupa grupe G sa jedinicom e onda je relacija a konvergencija u G. Ako je G grupa sa jedinicom e onda je ekvivalentnost
a
na G konvergencija u G, ako i samo ako je

a

e

norm. podgrupa grupe G. Neka je

a

konvergencija u G. Iz x

a

y sledi:

e= x^{-1}×x a x^{-1}y i e= x ×x^{-1} a y x^{-1} odnosno x^{-1}y , y x^{-1} Î a_e

8. CIKLIČNE GRUPE

Neka je S podgrupa nÎN tada elemente a_1,a_2… za a_1=a_2=a_n=a nazivamo n-ti stepen elementa I označavamo ga sa a ^{n}. Ako je S adaptivna podgrupa umesto a

n

piše na. Ako je a podskup grupe G podgrupu možemo pisati kao skup svih elemenata iz G koji mogu biti predstavljeni u obliku proizvoda stepena sa celim izložiocem konačnog broja elemenata iz G. Tako je: <a>={a

n

In

Î

Z

}

Za podgrupu <a> kažemo da je ciklična grupa generisana elementima a. Svaka ciklična grupa je komutativna, G je ciklična grupa: x,y ÎG; m,nÎZ; x=a^m; y=a^n Þxy= a^m a^n=a^{m+n}= a

n+m

=yx

Ako grupa G ima prost red onda je ona ciklična. Ako je grupa G ciklična grupa i H njena podgrupa onda su grupe H i G/H ciklične: G=<a> H={e}=E

Jedinična podgrupa grupe G je ciklična grupa reda 1 sa generatorom e.

9. PRSTEN

Za algebru (R,+, ×) sa dve binarne opera-cije + i × kažemo da je prsten ako važi:

(R,+) je komutativna grupa

(R, ×) je polugrupa

("a,b,cÎR) , a(b+c)=ab+ac

(a+b)c=ac+bc

Za (R,+) kažemo da je adaptivna grupa, a za (R, ×) da je multiplikativna grupa prstena. Umesto (R,+, ×) obično se piše samo R. Ako je (R, ×) komutativna polugrupa kažemo da je R komutativan prsten. Neutralni elemenat adaptivne grupe prstena R označavamo sa o i nazivamo o prsten.

Ako je R prsten za svako a,b,cÎR važe sledeće jednakosti:

A0=0a=0

-a(b)=a(-b)=-ab

(-a)(-b)=ab

a(b-c)=ab-ac

(a-b)c=ac-bc

U prstenu R važi:

("a,bÎR, nÎZ) n(ab)=(na)b=a(nb)

10. KONGRUENCIJA I IDEALI PRSTENA

(R,+, ×) i (R',+, ×) su prsteni. Preslika-vanje f:R®R' naziva se homomorfizam prstena, a ako je to preslikavanje homomorfne grupe (R, ×) u polugrupu (R', ×) tj. ako važi:

("x,yÎR) f(x+y)=f(x)+f(y), f(xy)=f(x)f(y)

Za homomorfizam f iz prstena R u prsten R' kažemo da je nulti ako je f(r)=O', gde je o' nula prstena R'.

Ako je f:R®R' nulti epimorfizam iz prstena (R,+, ×) u algebru (R',+, ×) istog tipa, onda je R' prsten.

Ako je pored toga prsten R:

- Komutativan
- Prsten sa jedinicom
- Telo
- Polje

Tada odgovarajuću osobinu ima i R'. Za ekvivalentnost a u skupu R kažemo da je kongurencija u adaptivnoj grupi i u multiplikativnoj polugrupi prstena R'. Ako je
a
kongurencija u prstenu R onda je nad
a
:R
®
R/
a
epimorfizam i R/O je prsten, R je prsten a I je neprazan skup tog prstena.

Za I kažemo da je ideal prstena R ako je: I – podgrupa adaptivne grupe prstena R. ("xÎR,

a
Î
I)
a
x, xa
Î
I. Ekvivalentnost
a
na prstenu R je kongurencija u R ako i samo ako je
a
0
ideal prstena R.

11.POLJA

Svaki konačni prsten ima konačnu karakteristiku. Neka je R prsten sa jedinicama e. R ima konačnu karakteristiku ako i samo ako postoji prirodan broj i takav da je n×e=0. Najmanji prirodan broj sa ovom osobinom je k-ka prstena R. Neka je R prsten sa jedinicama e i bez nepravilnih detalja nule. Ako R ima konačnu k-ku p, onda je p prost broj, a ako R nema konačnu k-ku, onda je jedna k-ka nula.

Ako R konačan prsten sa jedinicom i bez netrivijalnih delitelja nule, onda postoji broj p i prirodan broj k, tako da važi: ½R½=p^k.

K-ka polja je prost broj ili nula. Ako je F konačno polje onda je ½F½=p^k, gde je p k-ka polja. Konačna polja zovu se Galbova polja. Svako polje F je vektorski prostor nad svojim proizvoljnim podpoljem p.

12. POLINOMI

Ako a,bÎR[x] onda a+b, a-b, abÎR[x] tj. R[x] je podprsten prstena Rx. Pri tome važi:

deg (a+b), deg(a-b) ≤ max (deg a, deg b)

deg (a,b) ≤ deg a + deg b

Ako je R prsten bez netrivijalnih detalja nule, onda je deg (a,b) ≤deg a + deg b

Prsten R[x] zove se prsten polinoma nad R po argumentu x. Elementi prstena R[x] zovu se polinomi. Nula element prstena R
[x] zovu se koeficijenti polinoma (a_0,a_1,a_2…a_n). Koeficijenti nula polinoma su svi jednaki nuli. Ako je a,b
Î
F
[x] pri čemu je b_1
0 onda postoje jednoznačno određeni q,r
Î
F
[x] takvi da važe a=qb+r I deg r< deg b

Polinomi stepena nula su nesvodljivi. Polinom d je zajednički delitelj za a i b.

13. VEKTORSKI PROSTORI

Neka je (V,+) komutativna grupa i k polje brojeva. Ako je definisano preslikavanje (a,a)® aa iz kxV u V sa osobinama
a
(x+y)=
a
x+
a
y, (
a
+
b
)x=
a
x+
b
x,
a
(
b
x)= (
a
b
)x, 1x=x za svako
a
,
b
Î
k i x,y

Î
V onda V nazivamo vektorski prostor nad poljem k. Elemente skupa V nazivamo vektori, a elemente polja k skalari.

Operacija f: V^2®V zove se sabiranje vektora, a operacija koja preslikava kxV u V zove se množenje vektora skalarom. Neutralni element grupe (V,+) zove se nula vektor prostora V.
Neka je V vektorski prostor nad poljem k. Ako je izraz $a_1x_1 + a_2x_2 +...+ a_nx_n=0$ kažemo da su vektori linearno nezavisni, a ako postoje skalari takvi da je:
½
a
1
½
+
½
a
2
½
+...+
½
a
4
½
>
0 i važi:
a
1
x
1
+
a
2
x
2
+...+
a
n
x
n
=0 kažemo da su vektori linearno zavisni.

Neprazan podskup U vektorskog prostora V je podprostor V ako iz x,yÎU i a,bÎk sledi ax+byÎU.
Presek podprostora U

$_1$ i U_2 je skup U_1 Ç U_2, a zbir U_1+U_2 definisan je sa U_1+U_2 = {U_1+U_2 ï U_1 Î U_1, U_2 Î U_2}.

14. BAZA VEKTORSKOG PROSTORA

Neka je V vektorski prostor. Iz svakog skupa u=G(V) može se izdvojiti baza. Svaki element vektorskog prostora V može se na samo jedan način izraziti kao linearna kombinacija vektora i baze B.

Svaka baza B vektorskog prostora V jeste maksimalan linearni nezavistan podskup V. Ako vektorski prostor V ima bar jednu bazu sa konačnim brojem elemenata on se naziva konačno dimenzionalan prostor. U suprotnom prostor V je beskonačno dimenzionalan.

Broj vektora proizvoljne baze konačno dvodimenzionalnog vektorskog prostora naziva se dimenzija.

$dim(V_1+V_2)=dimV_1+dimV_2$ ® $dim(V_1$Ç$V_2)$

Svaka baza vektorskog prostora V naziva se i kordinatni sistem tog prostora.