

1) funkcije – osnovni pojmovi i vrste. Promenljiva (varijabla) veličina koja može dobiti različite brojne vrednosti. Fja ili preslikavanje je svako pravilo, zakon ili postupak koji daje zavisnos jedne promenljive veličine od neke druge. Za fju $f : a$

Ⓜ

b , a – domen, b – kodomen (

"

a

Ⓜ

a)(

$\$$

1

b

Ⓜ

b) $f(a)=b$, a – original, b - slika. Način zadavanja: tablično, grafički, analitički (flom). $Y=f(x)$ – eksplicitan oblik, $f(x,y)=0$ – implicitan oblik, $x=x(t)$, $y=y(t)$, - parametarski oblik (zavise od t).

Gausova raspodela $y = (1/$

Ö

2

p

) e

$-x^2$

, najvažnija raspodela u teoriji verovatnoće.

Specijalne klase funkcija:

def: fja je ograničena odozgo ako postoji broj m tako da je svako x iz domena (

$\$$

M

)(

"

x

Ⓜ

d) $f(x)$

$\$$

m). Fja je ograničena sa donje strane (

$\$$

M

)(

"

x

Ⓜ

d) m

$\$$

$f(x)$. F- ja je ograničena ako je ograničena sa donje i gornje strane. Fja je strogo rastuća ako važi: x_1

<

x_2

P

$f(x_1)$

$<$

$f(x_2)$. Fja je strogo opadajuća ako: x_1

$<$

x_2

P

$f(x_1)$

$>$

$f(x_2)$. Fja je rastuća ako x_1

ϵ

x_2

P

$f(x_1)$

ϵ

$f(x_2)$, a opadajuća x_1

ϵ

x_2

P

$f(x_1)$

ϵ

$f(x_2)$ – nije strogo opadajuća

. Monotone fje

: rast, stagnacija, opadanje.

Periodična fja

: p – najmanja (osnovna perioda), $f(x+p) = f(x)$. Teorema : ako je p perioda onda je i $2p, 3p...$

Perioda. Def: fja je parna ako je $f(-x)=f(x)$ za sve x , a neparna ako je $f(-x)= -f(x)$.

$P^*p=p, n^*n=p, p^*n=n$. Inverzna f^{-1} – ja. $F : a$

⊗

b bijekcija, f

-1

: b

⊗

a inverzna fja. $Y=f(x)$

\hat{U}

$x=f$

-1

(y). F^*f

-1

= id – identična fja. Nacrtaj tablicu! $F(x, x)$

n

,a

x

,sinx), $f^{-1}(x,$

n

Ö

$$x = x$$

$1/n$

, $\log a^x$, $\arcsin x$).

Elementarne fje

. Osnovne el. Fje: 1) stepene fje – sama sebi inverzna x

a

, a

$\hat{1}$

$q, 2$) eksponencijalna fje a

x

, a

$>$

0 3) logaritamska $\log a^x$, $y=a$

x

\hat{U}

$x=\log a^y$, 2) i 3) su inverzne, 4) trigonometriji $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, , 5) inverz trig fja $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \text{arcctg} x$, 4) i 5) su inverzne.

|

x

|

- nije elementarna fja. Dirihleova fja $d(x) =$

{

1, x

$\hat{1}$

q – racionalna; 0, x

$\hat{1}$

i – iracionalna.

racionalne fje

dobijaju se sa $+, -, *, :$, tu spadaju polinomi $(+, -, *, x$

n

).

Algebarske fje

, isto kao kod racionalnih samo je dozvoljeno jos x

n

;

n

Ö

x

iracionalne fje.

Su one algebarske fje koje nisu racionalne. Transcedentne fje. Su elementarne f- je koje nisu algebarske.

Hiperboličke fje:

$\text{ch} x$ – kosinus hiperbolički, $\text{sh} x = (e$

x

+ e

ϵ
 $>$
 $0) ($
 $\$$
 n
 o
 i
 $n)($
 " ;
 n
 3
 n
 o
 $)$
 $|$
 a
 n
 $- a$
 $|$
 $<$
 ϵ

. Konvergentan niz se skoro ceo nalazi u proizvoljnoj okolini svoje granične vrednosti. Skoro ceo niz znači ceo niz izuzev mnogo elemenata. Teorema: ako niz ima graničnu vrednost tada je ona jedinstvena $\lim n$

\otimes
 \neq
 a
 n
 $= a$
 \dot{U}
 $\lim n$
 \otimes
 \neq
 a
 b
 $= b$
 P

$a=b$. Def: niz he divergentan ako nije konvergentan. Teorema: niz

$\lim a$
 n
 $= a$
 P
 \lim
 $|$
 a

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 Def: niz koji teži nuli zove se nula niz. Def: niz je ograničen sa gornje strane ako je $a_n < m$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 m. Niz je ograničen sa gornje strane ako je $a_n < m$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 Niz je ograničen sa gornje i donje strane. Svaki konvergentan niz je ograničen, obrnuto ne mora da važi. Limsup a_n

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 – limes superior- najveća tačka nagomilavanja niza, $\liminf a_n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 – limes inferior – najmanja tačka nagomilavanja niza. Monotoni nizovi. a_n

$a_{n+1} > a_n$ – rastući, a_n
 $a_{n+1} < a_n$ – opadajući,

a_n
 ϵ
 $a_{n+1} > a_n$ – ne opadajući, a_n

$a_{n+1} > a_n$ –ne rastući. Teorema: svaki ograničeni monotoni niz je konvergentan. Teorema: bolcano – vajerštras. Svaki ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja. Teorema: košijev princip konvergencije. (a_n) konvergira akko (

"
 ϵ
 $>$
 $0)($
 $\$$
 no
 $\hat{}$

n)(
 "
 m,n
 3
 no)
 |
 am - an
 |
 <
 e
 .

3) granične vrednosti fja i neprekidnost. Def: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \hat{U} (\text{"}; e > 0) (\$d > 0) |x - a$

|
 <
 d
 p
 |
 f(x) - a
 |
 <
 e
 . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$
 \hat{U}
 \forall
 $\sin x / x = 1$. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$
 \hat{U}
 $a f(x) =$
 \pm
 \forall
 \hat{U}
 (
 "
 m
 >
 0)(
 $\$$
 d
 >
 0)

|
x - a

|
<
d

P
f(x)
3

m.

Leva i desna granična vrednost

: lim x

⊕

a
+

f(x) = a
+

, lim x

⊕

a
-

f(x) = a
-

Neprekidnost fje.

Def: fja y= f(x) je neprekidna u tački a ako lim x

⊕

a f(x) = f(a)

Ū

(
"

e

>

0)(

⊕

d

>

=)

|

x - a

|

<

d

P

|

f(x) - f(a)

|

<
e

. f – ja je neprekidna ako malim promenama argumenata odgovaraju nale promene fje. f ja je neprekidna u intervalu ako je neprekidna u svakoj tački u intervalu.

Tipovi tačka prekida

. Ako postoji konačna leva i desna granična vrednost fje u tački a i ako su ove vrednosti različite medju sobom tada tačka a se naziva tačka prekida prve vrste. $f(a - 0)$

1

$f(a + 0)$. Ako bar jedna od jednostranih graničnih vrednosti ne postoji ili je beskonačna imamo prekid ddruge vrste. Prekid prve vrste može biti otklonjiv i neotklonjiv.

Osobine neprekidnih $f - ja$

. Teorema: f ja neprekidna na segmentu

[
a,b
]

je ograničena. Teorema: f ja neprekidna na segmentu

[
a,b
]

dostiže svoj maksimum ili minimum. Def: $f - ja$ je uniformna (ravnomerna) neprekidna u nekom skupu ako (

"

e

>

0)(

\$

d

>

0)

|

$x_1 - x_2$

|

<

d

p

|

$f(x_1) - f(x_2)$

|

<

e

. Teorema: f ja neprekidna na segmentu

[
a,b
]

je uniformno neprekidna na tom segmentu. Teorema: teorema o medjuvrednosti: lema: ako je f ja neprekidna na segmentu

[
 a, b
]
 i ako $f(a)$ i $f(b)$ imaju suprotne znake tada postoji bar jedna unutrašnja tačka tog segmenta u kojoj je vrednost f jednaka 0. $F(a)$

<
 $0, f(b)$
 <
 0. Teorema: ako je f neprekidna na segmentu

[
 a, b
]
 i ako su x_1 i x_2 dve različite tačke tog segmenta takav da $f(x_1)$

$f(x_1)$ i ako je c takav da je $f(x_1)$

<
 c
 <
 $f(x_2)$ tada postoji tačka

x
 $\hat{}$
 [
 a, b
]
 tako da je $f($

x
 $) = c$. $F(x) = f(x) - c$, $f(x_1) = f(x_1) - c$

<
 $0, f(x_2) = f(x_2) - c$

>
 0 , iz poslednja 2 sledi lema (

$\$$
 x
 $) f($
 x
 $) = 0, f($
 x
 $) - c = 0, f($

x
 $) = c$.

4) beskonačno male i beskonačno velike veličine. Def: fja $y = f(x)$ naziva se bv v kad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

$f(x) =$

\pm

\neq

. F- ja $y = f(x)$ naziva se bmv kad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

∞

a $f(x) = 0$. Teorema: recipročna vrednost bv v je bmv i obrnuto. Zbir konačnog broja bm veličina je bm veličina. Proizvod bmv i ograničene fje je bmv. Def:

a

i

b

su bmv, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

∞

a =

a

$(x) /$

b

$(x) =$

{

0,

a

je bmv višeg reda od

b

, const,

a

i

b

su istog reda, 1,

a

i

b

su ekvivalentne veličine,

\neq

su neg reda. Def:

a

i

b

su bv v, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

∞

\neq

a

$(x) /$

b

$(x) =$

{

0,

a
 je bvv nižeg reda, const, istog reda, 1 ekvivalentno,
 ¥
 , višeg.

5) izvod f- je sa geometrijskom i fizičkom interpretacijom. Def: izvod fje y= f(x) u tački a je

$$f'(a) \text{ def } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{Def: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$- a). F'(a) \lim$$

D

x

⊗

$$0 f(a +$$

D

$$x) - f(a) /$$

D

$$x = \lim h$$

⊗

$$0 f(a+h) - f(a) / h = \lim$$

D

x

⊗

0

D

y/

D

x,

D

$$x = x - a. \text{ Teorema: ako fja ima izvod u tački a tada je } f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) +$$

w

$$(x) (x - a). F(x) - f(a) / x - a = f'(a) +$$

w

$$(x) ,$$

w

$$(x)$$

⊗

$$0 , x$$

⊗

a. Izvod fje je granična vrednost ko ličnika

priraštaja fje i priraštaja argumenta.

Gemetrijska i fizička interpretacija izvoda.

Izvod fje u nekoj tački jednak je tangemu nagibnog ugla tangente na krivu u toj tački.

6) jednačina tangente i normale krivih u ravni. Jed . Tan. T: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, jed nor: $y - f(a) = -1/f'(a)(x - a)$, $tg(a) = f'(a)$.

Jednačina prave kroz tačku $m(x_0, y_0)$,

$y - y_0 = k(x - x_0)$, k – koef. Pravca. Jednačina prave kroz dve tačke (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$. $S = s(m, n)$, $m(a, f(a))$, $n(a +$

$x)$, $f(a +$

$x)$. Jednačina sečice $s: y - f(a) = \frac{f(a +$

$x) - f(a)}{x - a}$

$x) (x - a)$.

x

$0, n$

m, s

t .

T: $y - f(a) = \lim$

x

0

$(f(a +$

$x) - f(a) /$

$x) (x - a)$, $kn = -1/k$. Teorema: dodirni elementi krive: $n = mc =$

y

$1 + (y')$

2

- normala, $t = ma =$

|

y/y'

Ö

$1+(y')$

2

|

- tangenta (odsečak), $sn = bc =$

|

yy'

|

- subnormala, $st = ab =$

|

y/y'

|

- subtangenta.

7) pravila za nalaženje izvoda. Teorema: ako su f_i diferencijalne fje, $i = 1, 2, \dots, n$. [$\forall i = 1, n \quad f_i(x)$]

' =

â

$i = 1, n \quad f_i'(x)$ aditivnost,

[

$c f(x)$

]

' = $c f'(x)$ – homogenost, aditivnost i homogenost daju linearnost. (

a

$f(x) +$

b

$g(x))' =$

a

$f'(x) +$

b

$g'(x),$

[

$f(x) * g(x)$

]

' = $f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x),$

[

$f(x) / g(x)$

]

' = $(f'(x) g(x) - f(x) g'(x)) / g(x)$

2

Izvod inverzne fje.

Teorema:

ako f – ja $y = f(x)$ ima izvod u tački x_0

0 i ako je monotona u nekoj okolini tačke x_0 tada inverzna f

- ja $x = f^{-1}(y)$

(y) ima izvod

$$\left[\begin{array}{l} f \\ -1 \end{array} \right] (y) = 1 / f'(x) \text{ ili } x'(y) = 1 / y'(x).$$

Izvod elementernih f – ja.

$Y = x^n$

, $y' = nx^{n-1}$

, $y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

\otimes
0 (x + D x)

- x

/ D
x = lim

D
x
 \otimes
0
D
x
[
(
x +

D
 $x)^{n-1}$

+ $(x +$
D
 $x)^{n-2}$

* $x + \dots x$
 $n-1$

]
/

D
 $x = nx^{n-1}$

. Tablica izvoda: $x^n = nx^{n-1}$

, $\sin x = \cos x$, $\cos x = -\sin x$, $\ln x = 1/x$, $\arcsin x = 1/\sqrt{1-x^2}$

Ö
 $1-x^2$
 2

, složen izvod:

[
 $f(x)$
]
 n'

= $n f^{n-1}$

$(x) f'(x)$.

Jednostrani izvodi:

$f'_-(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

D
 x
Ⓜ
0
-

$f(x+)$
D
 $x) - f(x) /$
D

$x -$ sa leve strane, f'

+
 $(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

D
 x
Ⓜ
0

+

$f(x +$

D

$x) - f(x) /$

D

$x -$ sa desne strane , $f'_{-} = f' +$

P

$f' = f'_{-} = f' +$. Ako fja ima levi i desni izvod u nekoj tački i ako su oni medjusobno jednaki , taka ona ima izvod u toj tački jednak toj vrednosti.

8) pojam diferencijala i diferencijabilnost fje $y = f(x)$, $y' = dy / dx$, $dx = Dx$, $dy = f'(x) dx$,

D

y

»

dy. Pod izvodom $f'(a)$ funkcije $f : d$

⊗

r, d

\hat{I}

r u tački a

\hat{I}

d podrazumevamo konačnu graničnu vrednost količnika priraštaja fje f i priraštaja argumenata x u tački a , kad priraštaj argumenta teži ka nuli tj. $F'(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} f'(a)$

D

$x) - f(a) /$

D

x kad x

⊗

a

D

x

⊗

0. Operacija nalaženja izvoda fje naziva se diferenciranje (derivacija) a deo analize koji proučava teoriju i primene izvoda se naziva diferencijalni račun. Fja f je diferencijabilna u tački a ako se njen priraštaj u a može predstaviti u obliku $f(x) - f(a) = a(x - a) +$

w

$(x) (x - a)$, gde je a

\hat{I}

r . Da bi fja f bila diferencijabilna u tački a potrebno je i dovoljno da ima izvod u a . Diferencijabilna funkcija u nekoj tački je i neprekidna u toj tački. Neka su $f(x)$

i $g(x)$ diferencijabilne fje u nekoj oblasti d , tada važi: 1)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' =$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left[\frac{f(x) \cdot g(x)}{g(x)} \right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

.

9) OSNOVNE TEOREME DIF. RAČUNA: ROLOVA, LAGRANŽEVA, KOŠIJEVA,

LOPITALOVA. TEOREMA (ROLLE) AKO JE $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ DIFERENCIJABILNA FJA I AKO JE $f(A) = f(B)$ TADA POSTOJI $C \in]A, B[$

TAKO DA JE $f'(C) = 0$.

TEOREMA: (LAGRANGE).

AKO JE f

$f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$

f NEPREKIDNA

f I DIFERENCIJABILNA

TADA POSTOJI TAČKA $C \in]A, B[$

TAKVA DA JE

$\frac{f(B) - f(A)}{B - A} = f'(C)$.

TEOREMA: (KOŠIJEVA).

AKO SU f I g DIFERENCIJABILNE FJE NA INTERVALU

$[A, B]$

A, B

]

I AKO BAR JEDNA OD NJIH IMA IZVOD

1

0 TADA POSTOJI TAČKA C TAKVA DA JE

Ⓜ

(

\$

C) $F(B) - F(A) / G(B) - G(A) = F'(C) / G'(C)$.

TEOREMA: LOPITALOVO PRAVILO.

NEKA SU F I G DIFERENCIJABILNE FJE AKO JE $F(A) = G(A) = 0$ I AKO POSTOJI GRANIČNA VREDNOST SA LIM X

Ⓜ

A $F(X) / G(X) = \lim F'(X) / G'(X) = L$, TADA POSTOJI GRANIČNA VREDNOST LIM X

Ⓜ

A $F(X) / G(X) \rightarrow L$ I LIM X

Ⓜ

A $F(X) / G(X) = \lim F'(X) / G'(X) = L$. TEOREMA: PRIMENA NA NEODRDJENOSTI TIPA "1

¥

”, LIM F

G

= E

LN LIM FG

= E

LIMGLNF

= E

LIM G(F - 1)

, LIM X

Ⓜ

¥

F (X)

G(X)

= E

LIM X

Ⓜ

A G(X)

[

F(X) - 1

]

.

10) TEJLOROVA I MAKLORENOVA FORMULA. DEF: AKO JE $f(x) \in C^{[n]} [A,B]$, $C^{[n]} (A,B)$ – SKUP FJA DEFINISANIH NA

[
A,B
]
I NEPREKIDNIH ZAJEDNO SA IZVODOM N- TOG REDA $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$

, POLINOM $T_n(x) = f(A) + (f'(A)/1!) (x - A) + (f''(A)/2!) (x - A)^2$

+ ...+ $(f^{(n)}(A)/n!) (x - A)^n$

SE ZOVE TEJLOROV POLINOM FJE

U TAČKI A, ZA $A = 0$ MAKLORENOV POLINOM, TEOREMA: $f(A) = T_n(A)$, $f'(A) = T_n'(A), \dots, f^{(n)}(A) = T_n^{(n)}(A)$

$f(A) = T_n(A)$

$f'(A) = T_n'(A)$

$f''(A) = T_n''(A)$

$f^{(n)}(A) = \dots = 0$. TEOREMA: TEJLOROVA FORMULA. $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ – OSTATAK, $R_n(x) =$

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - A)^{n+1}$

$\xi \in (a, x)$

$\xi \in (x, b)$

$\xi \in (a, x)$, $R_n(x) =$

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - A)^{n+1}$

, - LAGRANŽEV OBLIK KONSTANTE, A

ξ

$R_n(x) = O((x - A)^{n+1})$

N

– PEANOV OBLIK,

a

= O(

b

),

a

JE BESKONAČNO MALA VELIČINA VIŠEG REDA NEGO

b

, X

3

= O(X), X

3

= O(SINX).

TEJLOROVA FORMULA

: $F(X) = F(A) + (F'(A) / 1!) (X - A) + (F''(A) / 2!) (X - A)^2$

2

+...+ (F

(N)

(A) / N!) (X - A)

N

+ RN (X).

MAKLORENOVA FORMULA

: $F(X) = F(0) + (F'(0) / 1!) * X + (F''(0) / 2!) * X^2$

2

+ ...+ (F

(N)

(0) / N!) * X

N

+ RN (X).

11) MONOTONOST, EKSTREMI, KONVEKSNOST I PREVOJNE TAČKE F – JA JEDNE PROMENLJIVE.

OPŠTI POSTUPAK Z AISPITIVANJE F- JA. 1) DOMEN SADRŽI INTERVALE NEPREKIDNOSTI I TAČKE PREKIDA, 2) NULE, ZNAK FJE, 3) NEPARNOST, PARNOST, PERIODIČNOST, 4) ASIMPTOTE – PONAŠANJE NA RUBOVIMA ILI GRANICAMA, 5) ESTREMI, INTERVALI MONOTONOSTI, 6) KONVEKSNOST, KONKAVNOST, PREVOJNA TAČKA (TAČKA INFLEKSIJE), 7) GRAFIK, TABLICA. 1)

DOMEN $Y = \frac{1}{F(X)}$, $F(X) \neq 0$, $Y = 1/F(X)$, $F(X) \neq 0$, $Y = \ln F(X)$, $F(X) > 0$, 2)

$Y = 0$, $F(X) = 0$, Y

>

0, Y

<

0, Y(X)

>

0., 3) $F(-X) = F(X)$ – PARNA F – JA, $F(-X) = -F(X)$ – NEPARNA, 4) ASIMPTOTA DATE F – JE $Y = F(X)$ JE NEKA DRUGA F – JA $Y =$

j

(X), AKO VAŽI LIM X

⊗

¥

[

F(X) -

j

(X)

]

= 0, LIM X

⊗

¥

F(X) /

j

(X) JE ASIMPTOTA ZA F(X). DEF: HORIZONTALNA ASIMPTOTA $Y = F(X)$ AKO VAŽI LIM X

⊗

±

¥

F(X) = C, Y = C. DEF: VERTIKALNA ASIMP. X = A, LIM X

⊗

A

±

F(X) =

±

¥

. DEF:

Y = F(X) KOSA A. Y = KX + N. LIM X

⊗

±

¥

[

F(X) – KX - N

]

= 0, K = LIM X

⊗

¥

F(X) / X, N = LIM X

⊗

¥

[
 $F(x) - kx$
]

5) MONOTONOST

. TEOREMA: y'

>

0

P

Y

-

, y'

<

0

P

Y

-

, DEF: $f'(a) = 0$, a – STACIONARNA TAČKA, $f(a)$ JE TAČKA MAX AKO (

"

X

∩

$(a - \epsilon, a + \epsilon)$ $f(x)$

£

$f(a)$. LOKALNA OSOBINA ZA MAX I MIN. $f(x)$

-

X

∩

$(a - \epsilon, a)$, $f(x)$

-

X

∩

$(a, a + \epsilon)$

}

P

$f(a)$ JE MAX ;

$f(x)$

-

X

∩

$(a - \epsilon, a)$, $f(x)$

-

X

∩

$(a, a + \epsilon)$

}

P
 $F(A)$ JE MIN. TEREMA: $F'(A) = 0, F''(A)$

>

0

P

$F(A)$ JE MIN, $F'(A) = 0, F''$

<

0

P

$F(A)$ JE MAX.

6) KONVEKSNOŠĆ I KONKAVNOŠĆ

. DEF: F – JA JE KONVEKSNA NA NEKOM INTERVALU AKO SE NJEN GRAFIK NALAZI IZNAD TANGENTE U BILO KOJOJ TAČKI TOG INTERVALA. DEF: F – JA JE KONKAVNA AKO SE NJEN GRAFIK NALAZI ISPOD TANGENTE. TEOREMA: Y JE KONVEKSNA

«

$Y''(X)$

3

0 X

↑

(A, B) , Y JE KONKAVNA

«

$Y''(X)$

£

0. DEF: A JE

PREVOJNA TAČKA

F – JE $F(X)$ AKO SE U TOJ TAČKI F – JA MENJA IZ KONVEKSNE U KONKAVNU I OBRNUTO. PREVOJNA TAČKA SE TRAŽI TAKO ŠTO SE NADJE DRUGI IZVOD U 0. $F''(X) = 0, X = A, F''(A) = 0$. TEOREMA: $F(X) = AX$

M

+ ... / BX

N

+...

{

M

<

N

$X.A Y = 0, M = N X.A Y = A / B, M = N + 1$ K.A., M

>

$N + 1$ KRIVA ASIMPTOTA.

12) PARCIJALNI IZVODI. PARCIJALNI IZVOD PO X F – JE F U OZNACI F ' X, F – JA JE ARGUMENATA X I Y , KOJA SE DOBIJA DIFERENCIRANJEM F- JE F PO X, SMATRAJUĆI Y KONSTANTOM TJ. $F' X (X,Y) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{F(X + \Delta X, Y) - F(X, Y)}{\Delta X}$,

D
X

®

0. ZA PARCIJALNI IZVOD PO X F- JE F KORISTE SE I SLEDEĆE OZNAKE:

d
Z /
d
X,
d
F(X,Y) /
d
X, (
d
/
d

X) F(X,Y), ANALOGNO SE DEFINIŠE PARCIJALNI IZVOD PO Y F- JE F TJ.

$F' Y (X,Y) = \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \frac{F(X, Y + \Delta Y) - F(X, Y)}{\Delta Y}$

D
Y,
D
Y

®

0. PARCIJALNI IZVODI DRUGOG REDA. SVAKI PARC. IZVOD PRVOG REDA IMA DVDA PARCIJALNA IZVODA, TAKO DOBIJAMO ČETIRI PARCIJALNA IZVODA DRUGOG REDA:

d
/
d
X (
d
Z /
d
X) =
d
2
Z /
d
X
2

$$= F''_{XX} = Z''_{XX};$$

d

/

d

Y (

d

Z /

d

X) =

d

²

Z /

d

X

d

$$Y = F''_{XY} = Z''_{XY};$$

d

/

d

X (

d

Z /

d

Y) =

d

²

Z /

d

Y

d

$$X = F''_{YX} = Z''_{YX};$$

d

/

d

Y (

d

Z /

d

Y) =

d

²

Z /

d

Y

²

= F''_{YY} = Z''_{YY}. IZVODE F''_{YX} I F''_{XY} NAZIVAMO MEŠOVITI IZVODI. TEOREMA: AKO

SU MEŠOVITI IZVODI DRUGOG REDA F- JE F DVA ARGUMENTA X I Y NEPREKIDNI, ONDA SU MEDJUSOBNO JEDNAKI TJ. VAŽI $F''_{XY}(X,Y) = F''_{YX}(X,Y)$.

13) TOTALNI DIFERENCIJAL. NEKA JE $F : (X,Y) \in Z$ DIFERENCIJABLINA F – JA PO X I Y.

RAZLIKA $DZ = DF(X,Y) = F(X + DX, Y + DY) - F(X,Y)$ NAZIVA SE TOTALNI PRIRAŠTAJ F – JE F. TA F- JU F KAŽEMO DA JE

DIFERENCIJABILNA U TAČKI $M(X,Y)$ AKO SE NJEN TOTALNI PRIRAŠTAJ

D
F(M) MOŽE PREDSTAVITI U OBLIKU

D
 $F(M) = A$

D
 $X + B$

D
 $Y +$

w
(M)

Ö
D

X
2

+
D

Y
2

, GDE SU A I B KONSTANTE, A

w
NEPREKIDNA F – JA U TAČKI M I JEDNAKA NULI U TOJ TAČKI. LINEARNA KOMBINACIJA PRIRAŠTAJA ARGUMENATA, TJ. IZRAZ A

D
 $X + B$

D
Y, NAZIVA SE TOTALNI DIFERENCIJAL F- JE F U TAČKI $M(X,Y)$. TOTALNI DOFERENCIJAL F – JE F : (X,Y)

®
Z OZNAČAVAMO SA $DZ = DF(X,Y)$. TEOREMA: TOTALNI DIFERENCIJAL F- JE DVA ARGUMENTA JEDNAK JE ZBIRU PROIZVODA PARCIJALNIH IZVODA I DIFERENCIJALA ODGOVARAJUĆIH ARGUMENATA. TEOREMA: DA BI IZRAZ $P(X,Y)DX + Q(X,Y)DY$ BIO TOTALNI DIFERENCIJAL POTREBNO JE I DOVOLJNO DA VAŽI

d

P /
 d
 Y =
 d
 Q /
 d
 X.

14) IZVOD SLOŽENE F- JE , LOGARITAMSKI IZVOD I F- JE DATE U IMPLICITNOM

OBLIKU. $F(x) = F(F(x))$. TEOREMA: AKO F- JA F(x) IMA IZVOD U TAČKI X A AKO F(u) IMA IZVOD U TAČKI $u = F(x)$, TADA I SLOŽENA F- JA $F(x)$ IMA IZVOD $F'(x) = F'(F(x)) * F'(x)$. DOKAZ:

F
 $f'(x) = \lim_{D \rightarrow x} \frac{F(x+D) - F(x)}{D}$
 D
 X
 ®
 0

F
 $(x + D) - F(x) / D$
 D
 X =

LIM
 D
 X
 ®
 0

$F(F(x + D) - F(F(x))) / D$
 D
 $X = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{F(F(x + D) - F(F(x)))}{D}$
 D

X
 \mathbb{R}
 0

$F(F(X+D)) - F(F(X)) / F(X + D)$
 $X) - F(X) * F(X + D)$
 $X) - F(X) / D$
 X.

LOGARITAMSKI IZVOD

: KORISTI SE KADA NE ZNAMO DA LI JE STEPENA ILI EKSPONENCIJALNA F- JA. $Y = F$

(X)
 $G(X)$

□

*LN, $LN Y = LN F(X)$

$G(X)$

, $LN Y = G(X) LN F(X)$

□

,

Y' / Y

$= G' (X) LN F(X) + G(X) * (F' (X) / F(X)), Y'$

$= Y$

[$G' (X) LN F(X) + G(X) * (F' (X) / F(X))$

]

,

$Y' = F(X)$

$G(X)$

[$G' (X) LN F(X) + G(X) * (F' (X) / F(X))$

]

. JEDNAČINOM $F(X,Y) = 0$ MOŽE BITI DEFINISANA F- JA $G : X$

\mathbb{R}

Y. JEDNAČINOM $F(X,Y,Z) = 0$ MOŽE BITI DEFINISANA F – JA $G : (X,Y)$

\mathbb{R}

Z. AKO OVE JEDNAČINE DEFINIŠU NEKE F- JE , ONDA KAŽEMO DA SU TE F- JE DATE U

IMPLICITNOM OBLIKU. PR: X

2

+ XY + Y

2

= 6, $2X + Y + XY' + 2YY' = 0$, $XY' + 2YY' = -2X - Y$, $Y'(X + 2Y) = -2X - Y$, $Y' = -2X - Y / X + 2Y$.

15) TANGENTNA RAVAN POVRŠI I NORMALA NA POVRŠ. NEKA JE F- JA F : (X,Y) @ Z DIFERENCIJABILNA U TAČKI (X₀,Y₀). DVE PRAVE KOJE SE SEKU U TAČKI M, ODREDJUJU RAVAN T, KOJA SE NAZIVA TANGENTNA RAVAN POVRŠI S U TAČKI M. TAČKA M JE DODIRNA TAČKA T I POVRŠI S U TAČKI M. JEDNAČINA TANGENTNE RAVNI F- JE F U TAČKI M GLASI $Z - Z_0 = F'_X(X_0, Y_0)(X - X_0) + F'_Y(X_0, Y_0)(Y - Y_0)$. AKO JE JEDNAČINA POVRŠI S DATA U OBLIKU $F(X, Y, Z) = 0$ ONDA JEDNAČINA TANGENTNE RAVNI IMA OBLIK $F'_X(M)(X - X_0) + F'_Y(M)(Y - Y_0) + F'_Z(M)(Z - Z_0) = 0$. PRAVA NORMALNA NA TANGENTNOJ RAVNI T U DODIRNOJ TAČKI M NAZIVA SE NORMALA POVRŠI S U TAČKI M. NJENA JEDNAČINA IMA OBLIK $X - X_0 / F'_X(X_0, Y_0) = Y - Y_0 / F'_Y(X_0, Y_0) = Z - Z_0 / -1$, ODNOSNO $X - X_0 / F'_X(M) = Y - Y_0 / F'_Y(M) = Z - Z_0 / F'_Z(M)$.

16) EKSTREMNE VREDNOSTI F- JA DVE PROMENLJIVE. TEOREMA: POTREBNI USLOVI ZA EGZISTENCIJU EKSTREMA. DA BI FUNKCIJA DVE PROMENLJIVE U NEKOJ TAČKI IMALA EKSTREMNU VREDNOST POTREBNO JE DA NJENI PARCIJALNI IZVODI BUDU JEDNAKI NULI. TEOREMA; NAKA JE A=

d

2

Z /

d

X

2

(X₀,Y₀), B=

d

2

Z /

d

X
 d
 $Y (X_0, Y_0), C =$
 d
 2
 $Z /$
 d
 Y
 2
 $(X_0, Y_0).$
 d
 $Z /$
 d
 $X (X_0, Y_0) = 0,$
 d
 $Z /$
 d
 $Y (X_0, Y_0) = 0,$
 D
 $= AC - B$
 2
 $,$
 D
 $>$
 $0, A$
 $<$
 0
 P
 $Z(X_0, Y_0) \text{ JE MAX,}$
 D
 $>$
 $0, A$
 $>$
 0
 P
 $Z(X_0, Y_0) \text{ JE MIN,}$
 D
 $= 0, \text{ POTREBNA SU DODATNA ISPITIVANJA.}$

17) PRIMITIVNA F- JA I NEODREDJENI INTEGRAL. DEF: PRIMITIVNA F – JA F- JE F(X) JE

$F(x)$ TAKVA DA JE $F'(x) = F(x)$. TEOREMA: AKO JE $F(x)$ PRIMITIVNA F - JA ONDA JE TAKODJE $F(x) + C$ PRIMITIVNA F - JA. TEOREMA: AKO SU $F(x)$ I $G(x)$ PRIMITIVNE F - JE ZA ISTU F - JU TADA JE $F(x) - G(x) = C$. DEF: SKUP SVIH PRIMITIVNIH F - JA F - JE $F(x)$ ZOVE SE NEODREDJENI INTEGRAL I OZNAČAVA SE SA

$\int F(x) dx = F(x) + C$. TEOREMA: SVAKA NEPREKIDNA F - JA IMA NEODREDJENI INTEGRAL.

18) OSNOVNE OSOBINE NEODREDJENOG INTEGRALA. $(\int F(x) dx)' = F(x), \int F'(x)$

$\int dx = F(x) + C,$

\int

$[F(x) + G(x)$

$] dx =$

$\int F(x) dx +$

\int

$G(x) dx -$ ADITIVNOST,

\int

$K \int F(x) dx = K$

\int

$F(x) dx -$ HOMOGENOST,

\int

$\int K \int F(x) dx =$

\int

$K \int F(x) dx =$

\int

$K \int$

\int

$\int F(x) dx$. ADITIVNOST I HOMOGENOST DAJU LINEARNOST.

19) INTEGRACIJA SMENOM PROMENLJIVIH I PARCIJALNA INTEGRACIJA. \int SMENA:

\int

$\int F(G(x)) G'(x) dx =$

\int

F (U) DU – FORMULA, SMENA: U = G(X), DU = G' (X) DX. PRIMER:

$$\int \sin 2x dx =$$

$$\int \sin t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}$$

$\int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t = -\cos 2x/2 + C$, SMENA : $2x = t$, $2dx = dt$, $dx = \frac{1}{2} dt$.
 PARCIJALNA: DOKAZ: $(UV)' = U'V + UV'$

■

ò
 - INTEGRIRAMO,

$$\int (UV)' dx =$$

$$\int U'V dx +$$

$$\int UV' dx, UV =$$

$$\int V du +$$

$$\int u dv,$$

$$\int u dv = uv -$$

$\int v du$. PRIMER:

$$\int x e^x$$

$$dx = x e^x$$

x

-

$$\int e^x$$

x

$$dx = x e^x$$

x

$$- e^x$$

$$+ C = (x - 1) e^x$$

x

$$+ C, U = x, DU = dx, DV = e^x$$

$$dx, V = e^x$$

x

.

20) INTEGRACIJA RACIONALNIH F- JA. 1) $\int (A_0 X^N + A_1 X^{N-1} + \dots + A_N) DX = A_0 (X^{N+1} /$

$$\int (X^N / N) + \dots + A$$

$$X + C. 2)$$

$$\int \frac{A}{(X - A)^N} DX = A$$

$$\int \frac{1}{(X - A)^N} DX = A$$

$$\int \frac{1}{U} DU = A$$

$$\int \frac{1}{-U+1} DU = A (U^{-U+1})$$

$$\int \frac{1}{1-U} + C = (-A / U - 1) * (1 / (X - A))$$

$$\int \frac{DX}{AX^2 + BX + C} =$$

$$\int \frac{DX}{A(X - X_1)(X - X_2)}, 3A) X_1, X_2$$

AKO SU BROJEVI REALNI, I =

$$\int \frac{A}{X - X_1} DX +$$

$$\int \frac{B}{X - X_2} DX.$$

21) INTEGRACIJA IRACIONALNIH I TRIG. FJA. NEKA JE R RACIONALNA FJA SVOJIH ARGUMENATA . INTEGRAL. $\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx$

$ax + b, \dots$
NK

$\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx$, SMENOM $ax + b = z^n$

, GDE JE N NAJMANJI ZAJEDNIČKI SADRŽALAC BROJEVA n_1, n_2, \dots, n_k SVODI SE NA n

$\int R(1/A(z), z^{n-1}, \dots, z) dz$

$R(1/A(z), z^{n-1}, \dots, z)$

$z^{m_1}, z^{m_2}, \dots, z^{m_k}$

z^{m_1}, \dots, z^{m_k}
MK

$\int R(z, z^{m_1}, \dots, z^{m_k}) dz$, $m_i = n/n_i, 1 \leq i \leq k$

$\int R(z, z^{m_1}, \dots, z^{m_k}) dz$

K . SLIČNO,

$\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx$

$\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx$
NK

$\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx$ SMENOM $ax + b = z^n$

, GDE N IMA ISTO ZNAČENJE KAO U PRETHODNOM INTEGRALU, SVODI SE NA INTEGRACIJU RACIONALNE FJE.

INTEG. TRIG:

AKO JE PODINTEGRALNA FJA RACIONALNA PO $\sin x$ I $\cos x$, ONDA SE SMENOM $\tan x/2 = t$ PODINTEGRALNA FJA SVODI NA RACIONALNU FJU., A A KO JE NEPARNA PO $\cos x$, ONDA SE SMENOM $\sin x = t$ PODINTEGRALNI IZRAZ TRANSFORMIŠE U RACIONALNI IZRAZ PO T. A AKO JE NEPARNA PO $\sin x$, ONDA SMENA $\cos x = t$ SVODI INTEGRACIJU DATE FJE NA INTEGRACIJU RACIONALNE FJE PO T. A AKO JE PARNI

PO $\sin x$ I PO $\cos x$, ONDA SMENA $\tan x = t$ SVODI PODINTEGRALNU FJU NA RAC. FJU PO t . AKO JE PODINTEGRALNA FJA RAC PO $\tan x$, KORISTIMO SMENU $x = t$.

INTEGRALI OBLIKA

$$\int \sin^p x \cos^q x dx,$$

$$\int \sin^p x \cos^q x dx,$$

$$\int \cos^p x \cos^q x dx, p$$

Q, IZRAČUNAVAJU SE NA TAJ NAČIN ŠTO SE PROIZVOD TRIG FJA POD ZNAKOM INTEGRALA PRETHODNO TRANSFORMIŠE U ZBIR, NA OSNOVU POZNATIH OBRAZACA IZ TRIGONOMETRIJE.

22) DEF. I OSOBINE ODREDJENOG INTEGRALA. ZA FJU f OGRANIČENU SA SEGMENTU $[a, b]$, KAŽEMO DA JE INTEGRABILNA NA TOM SEGMENTU AKO POSTOJI GRANIČNA VREDNOST INTEGRALNE SUME

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{za } x \in [a, b]$$

0. OVA GRANIČNA VREDNOST NAZIVA SE ODREDJENI INTEGRAL FJE f NA

$$[a, b]$$

I OZNAČAVA

$$\int_a^b f(x) dx.$$

$$[a, b]$$

JE OBLAST INTEGRACIJE, BROJ a DONJA, A BROJ b GORNJA GRANICA ODREDJENOG INTEGRALA, FJA f JE PODINTEGRALNA FJA. TEOREMA: AKO JE FJA f INTEGRABILNA NA SEGMENTU I , ONDA JE I

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

|
INTEGRABILNA NA ISTOM SEGMENTU. TEOREMA: FJA F, NEPREKIDNA NA SEGMENTU I, INTEGRABILNA JE NA TOM SEGMENTU. TEOREMA: AKO JE FJA F OGRANIČENA NA SEGMENTU I I NA NJEMU IMA KONAČAN BROJ TAČKA PREKIDA, ONDA JE ONA INTEGRABILNA NA TOM SEGMENTU.

OSOBINE INT:

ò

A
B

$$\int_a^b f(x) dx = 0,$$

ò

A
B

$$\int_a^b f(x) dx = -$$

ò

A
B

$$\int_a^b f(x) dx,$$

ò

A
B

$$\int_a^b f(x) dx =$$

ò

A
C

$$\int_a^b f(x) dx +$$

ò

C
A

$$\int_a^b f(x) dx.$$