1) funkcije – osnovni pojmovi i vrste. Promenljiva (varijabla) veličina koja može dobiti različite brojne vrednosti. Fja ili preslikavanje je svako pravilo, zakon ili postupak koji daje zavisnos jedne promenljive veličine od neke druge. Za fju f : a
®
b , a – domen, b – kodomen (
"
a
Î
a)(
$
1
b
Î
b) f(a)=b , a – original, b - slika. Način zadavanja: tablično, grafički, analitički (flom). Y=f (x) – eksplicitan oblik, f(x,y) =0 – implicitan oblik, x=x(t), y=y(t), - parametarski oblik (zavise od t). Gausova raspodela y= (1/
Ö
2
p
) e
–x2
, najvažnija raspodela u teoriji verovatnoće.

Specijalne klase funkcija:

def: fja je ograničena odozgo ako postoji borj m tako da je svako x iz domena (
$
M
)(
"
x
Î
d) f(x)
£
m). Fja je ograničena sa donje strane (
$
M
)(
"
x
Î
d) m
£
f(x). F- ja je ograničena ako je ograničena sa donje i gornje strane. Fja je strogo rastuća ako važi: x1
<

x2
Þ
f(x1)
<
f(x2). Fja je strogo opadajuća ako: x1
<
x2
Þ
f(x1)
>
f(x2). Fja je rastuća ako x1
£
x2
Þ
f(x1)
£
f(x2), a opadajuća x1
£
x2
Þ
f(x1)
3
f(x2) – nije strogo opadajuća
. Monotone fje
: rast, stagnacija, opadanje.
Periodična fja
: p – najmanja (osnovna perioda), f(x+ p) = f(x). Teorema : ako je p perioda onda je i 2p,3p... Perioda. Def: fja je parna ako je f(-x)=f(x) za sve x, a neparna ako je f(-x)= -f(x). P*p=p,n*n=p,p*n=n. Inverzna f – ja. F : a
®
b bijekcija, f
–1
: b
®
a inverzna fja. Y=f(x)
Û
x=f
–1
(y). F*f
–1
= id – identična fja. Nacrtaj tablicu! F (x, x
n
,a
x
,sinx), f –1 (x,
n

Ö
x = x
1/n
, logax, arcsinx).
Elementarne fje
. Osnovne el. Fje: 1) stepene fje – sama sebi inverzna x
a
, a
Î
q, 2) eksponencijalna fje a
x
, a
>
0 3) logaritamska logax, y=a
x
Û
x=logay, 2) i 3) su inverzne, 4) trigonometrij sinx, cosx, tgx, ctgx, , 5) inverz trig fja arcsinx,arccosx,arctgx,arcctgx., 4) i 5) su inverzne.
|
x
|
- nije elementarna fja. Dirihleova fja d(x) =
{
1, x
Î
q – racionalna; 0, x
Î
i – iracionalna.
racionalne fje
dobijaju se sa +,-,*,:, tu spadaju polinomi (+.- *, x
n
).
Algebarske fje
, isto kao kod racionalnih samo je dozvoljeno jos x
n
;
n
Ö
x
iracionalne fje.
Su one algebarske fje koje nisu racionalne. Transcedentne fje. Su elementarne f- je koje nisu algebarske.
Hiperboličke fje:
chx – kosinus hiperbolički, chx= (e
x
+ e

–x
) /2.

2) nizovi i granične vrednosti. Def: niz je svako preslikavanje a: n ® r,c,f iz skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva. Niz se iznačava sa (a
n
)
n
Î
n
, (a
n
)
n=1
,
n=
¥
, (a
n
). Okolina tačke broja: okolina +
¥
(m,+
¥
), okolina

-
¥
(-
¥
,m). Def: tačka c je tačka nagomilavanja niza ako se u svakoj njenoj okolini nalazi beskonačno mnogo članova toga niza.def: niz (a
n
) je konvergentan i konvergira sa a u oznaci lim n
®
¥

a
n
=a ako (
"

e
>
0) (
$
n
o
Î
n)(
"
n
3
n
o
)
|
a
n
- a
|
<
e
. Konvergentan niz se skoro ceo nalazi u proizvoljnoj okolini svoje granične vrednosti. Skoro ceo niz znači ceo niz izuzev mnogo elemenata. Teorema: ako niz ima graničnu vrednost tada je ona jedinstvena lim n
®
¥
a
n
= a
Ù
lim n
®
¥
a
b
= b
Þ
a=b. Def: niz he divergentan ako nije konvergentan. Teorema: niz

lim a
n
= a
Þ
lim
|
a

n
|
=
|
a
|
. Def: niz koji teži nuli zove se nula niz. Def: niz je ograničen sa gornje strane ako je a
n
<
m. Niz je ograničen sa gornje strane ako je m
<
a
n
. Niz je ograničen sa gornje i donje strane. Svaki konvergentan niz je ograničen, obrnuto ne mora da važi. Limsup a
n
=
`
lim a
n
– limes superio- najveća tačka nagomilavanja niza, liminf a
n
=
_
lim a
n
– limes inferior – najmanja tačka nagomilavanja niza. Monotoni nizovi. An
<
an+1 – rastući ,an
>
an+1- opadajući,

an
£
an+1 – ne opadajući, an
3
an+1 –ne rastući. Teorema: svaki ograničeni monotoni niz je konvergentan. Teorema: bolcano – vajerštras. Svaki ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja. Teorema: košijev princip konvergencije. (an) konvergira akko (
"
e
>
0)(
$
no
Î

n)(
"
m,n
3
no)
|
am - an
|
<
e
.

3) granične vrednosti fja i neprekidnost. Def: lim x®a f(x) = a Û ("e > 0) ($d > 0) |x - a
|
<
d
Þ
|
f(x) - a
|
<
e
. Lim x
®
¥
sinx/x =1. Lim x
®
a f(x) =
±
¥
Û
(
"
m
>
0)(
$
d
>
0)

|
x - a
|
<
d
Þ
f(x)
3
m.

Leva i desna granična vrednost

: lim x
®
a
+
f(x) = a
+
, lim x
®
a
–
f(x) = a
–
.

Neprekidnost fje.

Def: fja y= f(x) je neprekidna u tački a ako lim x
®
a f(x) = f(a)
Û
(
"
e
>
0)(
$
d
>
=)
|
x – a
|
<
d
Þ
|
f(x) – f(a)
|

<
e
. F – ja je neprekidna ako malim promenama argumenata odgovaraju nale promene fje. Fja je neprekidna u intervalu ako je neprekidna u svakoj tački u intervalu.

Tipovi tačaka prekida

. Ako postoji konačna leva i desna granična vrednost fje u tački a i ako su ove vrednosti različite medju sobom tada tačka a se naziva tačka prekida prve vrste. F(a – 0)
1
f(a + 0). Ako bar jedna od jednostranih graničnih vrednosti ne postoji ili je beskonačna imamo prekid ddruge vrste. Prekid prve vrste može biti otklonjiv i neotklonjiv.

Osobine neprekidnih f – ja

. Teorema: fja neprekidna na segmentu
[
a,b
]
je ograničena. Teorema: fja neprekidna na segmentu
[
a,b
]
dostiže svoj maksimum ili minimum. Def: f – ja je uniformna (ravnomerna) neprekidna u nekom skupu ako (
"
e
>
0)(
$
d
>
0)
|
x1 – x2
|
<
d
Þ
|
f(x1) – f(x2)
|
<
e
. Teorema: fja neprekidna na segmentu
[
a,b
]
je uniformno neprekidna na tom segmentu. Teorema: teorema o medjuvrednosti: lema: ako je fja neprekidna na segmentu

[
a,b
]
i ako f(a) i f(b) imaju suprotne znake tada postoji bar jedna unutrašnja tačka tog segmenta u kojoj je vrednost fje jednaka 0. F(a)
<
0, f(b)
<
0. Teorema: ako je fja neprekidna na segmentu
[
a,b
]
i ako su x1 i x2 dve različite tačke tog segmenta takav da f(x1)
1
f(x1) i ako je c takav da je f(x1)
<
c
<
f(x2) tada postoji tačka
x
Î
[
a,b
]
tako da je f(
x
) = c. F(x) = f(x) – c , f(x1) = f(x1) – c
<
0, f(x2) = f(x2) – c
>
0 , iz poslednja 2 sledi lema (
$
x
) f(
x
) = 0, f(
x
) – c = 0, f(
x
) = c.

4) beskonačno male i beskonačno velike veličine. Def: fja y= f(x) naziva se bvv kad lim x®a f(x) =
±
¥
. F- ja y= f(x) naziva se bmv kad lim x
®
a f(x) = 0. Teorema: recipročna vrednost bvv je bmv i obrnuto. Zbir konačnog broja bm veličina je bm veličina. Proizvod bmv i ograničene fje je bmv. Def:
a
i
b
su bmv, lim x
®
a =
a
(x) /
b
(x) =
{
0,
a
je bmv višeg reda od
b
, const,
a
i
b
su istog reda, 1,
a
i
b
su ekvivalentne veličine,
¥
su neg reda. Def:
a
i
b
su bvv, lim x
®
¥
a
(x) /
b
(x) =
{
0 ,

a
je bvv nižeg reda, const, istog reda, 1 ekvivalentno,
¥
, višeg.

5) izvod f- je sa geometrijskom i fizičkom interpretacijom. Def: izvod fje y= f(x) u tački a je f ' (a) def lim x ®a (f(x) – f(a)) / (x – a). F ' (a) lim
D
x
®
0 f(a +
D
x) – f(a) /
D
x = lim h
®
0 f(a+h) – f(a) / h = lim
D
x
®
0
D
y/
D
x,
D
x = x –a. Teorema: ako fja ima izvod u tački a tada je f(x) = f(a) + f ' (a) (x – a) +
w
(x) (x- a). F(x) – f(a) / x – a = f ' (a) +
w
(x) ,
w
(x)
®
0 , x
®
a. Izvod fje je granična vrednost ko ličnika

priraštaja fje i priraštaja argumenta.

Gemetrijska i fizička interpretacija izvoda.
Izvod fje u nekoj tački jednak je tamgemsu nagibnog ugla tangente na krivu u toj tački.

6) jednačina tangente i normale krivih u ravni. Jed . Tan. T: y – f(a) = f ' (a) (x – a), jed nor: n : y – f(a) = - 1/ f ' (a) (x – a), tg(a) = f ' (a). Jednačina prave kroz tačku m(xo,yo),

y – yo = k (x – xo) , k – koef. Pravca. Jednačina prave kroz dve tačke (xo,yo), (x1,y1) , y – yo = y1 – yo / x1 – xo (x – xo). S= s(m,n), m(a,f(a)), n(a +
D
x), f(a +
D
x). Jednačina sečice s: y – f(a) = (f(a +
D
x) – f(a) /
D
x) (x – a).
D
x
®
0, n
®
m , s
®
t.

T: y – f(a) = lim
D
x
®
0

(f(a +
D
x) – f(a) /
D
x) (x – a) , kn = - 1/k. Teorema: dodirni elementi krive: n = mc =
|
y
Ö
1+(y ')
2
|
- normala, t = ma =

|
y/y '
Ö
1+(y ')
2
|
- tangenta (odsečak), sn = bc =
|
yy '
|
- subnormala, st = ab=
|
y/y '
|
- subtangenta.

7) pravila za nalaženje izvoda. Teorema: ako su fi diferencijalne fje , i = 1,2...n. [åi =1,n fi(x)]
' =
å
i = 1,n fi ' (x) ' aditivnost,
[
c f(x)
]
' = c f ' (x) – homogenost, aditivnost i homogenost daju linearnost. (
a
f(x) +
b
g(x)) ' =
a
f ' (x) +
b
g ' (x),
[
f(x) * g(x)
]
' = f ' (x) * g(x) + f(x) * g ' (x),
[
f(x) / g(x)
]
' = (f ' (x) g(x) – f(x) g ' (x)) / g(x)

2

.

Izvod inverzne fje.

Teorema:

ako f – ja y = f(x) ima izvod u tački x, x
1
0 i ako je monotona u nekoj okolini tačke x tada inverzna f

- ja x = f
–1
(y) ima izvod
[
f
–1
(y)
]
' = 1/ f ' (x) ili x ' y = 1/ y ' x.

Izvod elementernih f – ja.

Y = x
n
, y ' = nx
n –1
, y ' = lim
D
x
®
0 (x +
D
x)
n
– x
n
/
D
x = lim

D
x
®
0
D
x
[
(
x +

D
x)
n-1
+ (x +
D
x)
n-2
* x + ...x
n-1
]
/
D
x= nx
n-1
. Tablica izvoda: xn = nx
n-1
, sinx = cosx, cosx = - sinx, lnx = 1/x, arc sinx = 1/
Ö
1- x
2
, složen izvod:
[
f(x)
]
n '
= n f
n-1
(x) f ' (x).

Jednostrani izvodi:

f ' _ (x) = lim
D
x
®
0
-
f(x+
D
x) – f(x) /
D
x – sa leve strane, f '
+
(x) = lim
D
x
®
0

+
f(x +
D
x) – f(x) /
D
x – sa desne strane , f ' _ = f ' +
Þ
f ' = f ' _ = f ' +. Ako fja ima levi i desni izvod u nekoj tački i ako su oni medjusobno jednaki , taka ona ima izvod u toj tački jednak toj vrednosti.

8) pojam diferencijala i diferencijabilnost fje y = f (x), y ' = dy / dx, dx = Dx, dy = f ' (x) dx ,
D
y
»
dy. Pod izvodom f ' (a) funkcije f : d
®
r, d
Í
r u tački a
Î
d podrazumevamo konačnu graničnu vrednost količnika priraštaja fje f i priraštaja argumenata x u tački a, kad priraštaj argumenta teži ka nuli tj. F ' (a) lim f (x) – f(a) / x – a = lim f (a +
D
x) – f(a) /
D
x kad x
®
a

D
x
®
0. Operacija nalaženja izvoda fje naziva se diferenciranje (derivacija) a deo analize koji proučava teoriju i primene izvoda se naziva diferencijalni račun. Fja f je diferencijabilna u tački a ako se njen priraštaj u a može predstaviti u obliku f (x) – f(a) = a(x – a) +
w
(x) (x – a) , gde je a
Î
r. Da bi fja f bila diferencijabilna u tački a potrebno je i dovoljno da ima izvod u a. Diferencijabilna funkcija u nekoj tački je i neprekidna u toj tački. Neka su f(x)

i g(x) diferencijabilne fje u nekoj oblasti d , tada važi: 1)

(
a
f(x) +
b
g(x)) ' =
a
f ' (x) +
b
g ' (x), 2)
[
f(x) * g(x)
]
' = f ' (x) * g(x) + f(x) * g ' (x), 3)
[
f(x) / g(x)
]
' = (f ' (x) g(x) – f(x) g ' (x)) / g(x)
2
.

9) OSNOVNE TEOREME DIF. RAČUNA: ROLOVA, LAGRANŽEVA, KOŠIJEVA, LOPITALOVA. TEOREMA (ROLLE) AKO JE F : [A,B] ® R DIFERENCIJABILNA FJA I AKO JE F(A) = F(B) TADA POSTOJI C Î[A
,B
]
TAKO DA JE F ' (C) = 0.
TEOREMA: (LAGRANGE).
AKO JE F
[
A,B
]
®
R NEPREKIDNA F –JA I DIFERENCIJABILNA TADA POSTOJI TAČKA C , C
Î
[
A,B
]
, TAKVA DA JE F(B) – F(A) / B – A = F ' (C).
TEOREMA:(KOŠIJEVA).
AKO SU F I G DIFERENCIJABILNE FJE NA INTERVALU
[

A,B
]
I AKO BAR JEDNA OD NJIH IMA IZVOD
1
0 TADA POSTOJI TAČKA C TAKVA DA JE
®
(
$
C) F(B) – F(A) / G(B) – G(0) = F ' (C) / G ' (C).

TEOREMA: LOPITALOVO PRAVILO.

NEKA SU F I G DIFERENCIJABILNE FJE AKO JE F(A) = G(A) = 0 I AKO POSTOJI GRANIČNA VREDNOST SA LIM X
®
A F(X) / G(X) = LIM F ' (X)/ G ' (X) = L, TADA POSTOJI GRANIČNA VREDNOST LIM X
®
A F(X) / G(X) I LIM X
®
A F(X) / G(X) = LIM F ' (X) / G ' (X) = L. TEOREMA: PRIMENA NA NEODRDJENOSTI TIPA ”1
¥
”, LIM F
G
= E
LN LIM FG
= E
LIMGLNF
= E
LIM G(F – 1)
, LIM X
®
¥
F (X)
G(X)
= E
LIM X
®
A G(X)
[
F(X) - 1
]
.

10) TEJLOROVA I MAKLORENOVA FORMULA. DEF: AKO JE F(X) Î C [U] [A,B] , C[U] (A,B) – SKUP FJA DEFINISANIH NA
[
A,B
]
I NEPREKIDNIH ZAJEDNO SA IZVODOM N- TOG REDA F, F ",F '", ...F
(N)
, POLINOM TN(X) = F(A) +(F ' (A)/ 1!) (X – A) + (F " (A) /2!) (X – A)
2
+ ...+ (F
(N)
(A) / N!) (X – A)
N
SE ZOVE TEJLOROV POLINOM FJE

U TAČKI A, ZA A = 0 MAKLORENOV POLINOM , TEOREMA: F(A) = TN(A) , F ' (A) = TN ' (A),...,F
(N)
(A)= TN
(N)
(A), TN
(N+1)
(A) = TN
(N+2)
(A) = ...=0. TEOREMA: TEJLOROVA FORMULA. F(X) = TN(X) + RN(X) – OSTATAK, RN(X)= (X – A)
N
*
w
(X),
w
(X)
®
0 , X
®
A , RN(X) = (F
(N+1)
(
x
) / (N+1)!) (X – A)
N+1
, - LAGRANŽEV OBLIK KONSTANTE, A
£
x
£
X, RN(X) = O((X – A)

N

– PEANOV OBLIK,

a

= O(

b

),

a

JE BESKONAČNO MALA VELIČINA VIŠEG REDA NEGO

b

, X

3

= O(X), X

3

= O(SINX).

TEJLOROVA FORMULA

: F(X) = F(A) + (F ' (A) / 1!) (X – A) + (F '' (A) / 2!) (X – A)

2

+...+ (F

(N)

(A) / N!) (X – A)

N

+ RN (X).

MAKLORENOVA FORMULA

: F(X) = F(0) + (F ' (0) / 1!) * X+ (F '' (0) / 2!) * X

2

+ ...+ (F

(N)

(0) / N!) * X

N

+ RN (X).

11) MONOTONOST, EKSTREMI, KONVEKSNOST I PREVOJNE TAČKE F – JA JEDNE PROMENLJIVE. OPŠTI POSTUPAK Z AISPITIVANJE F- JA. 1) DOMEN SADRŽI INTERVALE NEPREKIDNOSTI I TAČKE PREKIDA, 2) NULE, ZNAK FJE, 3) NEPARNOST, PARNOST, PERIODIČNOST, 4) ASIMPTOTE – PONAŠANJE NA RUBOVIMA ILI GRANICAMA, 5) ESTREMI, INTERVALI MONOTONOSTI, 6) KONVEKSNOST, KONKAVNOST, PREVOJNA TAČKA (TAČKA INFLEKSIJE), 7) GRAFIK, TABLICA. 1) DOMEN Y = Ö F(X), F(X) ³ 0, Y = 1/ F(X), F(X) ¹0, Y = LN F(X), F(X) > 0, 2) Y = 0, F(X) = 0, Y

>

0, Y
<
0, Y(X)
>
0., 3) F(- X) = F(X) – PARNA F – JA, F(- X) = - F(X) – NEPARNA, 4) ASIMPTOTA DATE F – JE Y = F(X) JE NEKA DRUGA F – JA Y=
j
(X), AKO VAŽI LIM X
®
¥
[
F(X) -
j
(X)
]
= 0, LIM X
®
¥
F(X) /
j
(X) JE ASIMPTOTA ZA F(X). DEF: HORIZONTALNA ASIMPTOTA Y = F(X) AKO VAŽI LIM X
®
±
¥
F(X) = C, Y = C. DEF: VERTIKALNA ASIMP. X = A, LIM X
®
A
±
F(X) =
±
¥
. DEF:

Y = F(X) KOSA A. Y = KX + N. LIM X
®
±
¥
[
F(X) – KX - N
]
= 0, K = LIM X
®
¥
F(X) / X, N = LIM X
®
¥

[
F(X) - KX
]
,
5) MONOTONOST
. TEOREMA: Y '
>
0
Þ
Y
-
, Y '
<
0
Þ
Y
-
, DEF: F ' (A) = 0, A – STACIONARNA TAČKA, F(A) JE TAČKA MAX AKO (
"
X
Î
(A – Q, A + Q)) F(X)
£
F(A). LOKALNA OSOBINA ZA MAX I MIN. F(X)
-
X
Î
(A – Q, A) , F(X)
-
X
Î
(A, A + Q)
}
Þ
F(A) JE MAX ;

F(X)
-
X
Î
(A – Q , A) , F(X)
-
X
Î
(A, A + Q)
}

Þ
F(A) JE MIN. TEREMA: F ' (A) = 0, F '' (A)
>
0
Þ
F(A) JE MIN, F ' (A) = 0, F ''
<
0
Þ
F(A) JE MAX.

6) KONVEKSNOST I KONKAVNOST
. DEF: F – JA JE KONVEKSNA NA NEKOM INTERVALU AKO SE NJEN GRAFIK NALAZI IZNAD TANGENTE U BILO KOJOJ TAČKI TOG INTERVALA. DEF: F – JA JE KONKAVNA AKO SE NJEN GRAFIK NALAZI ISPOD TANGENTE. TEOREMA: Y JE KONVEKSNA

«

Y '' (X)
³
0 X
Î
(A,B), Y JE KONKAVNA
«
Y '' (X)
£
0. DEF: A JE
PREVOJNA TAČKA
F – JE F(X) AKO SE U TOJ TAČKI F – JA MENJA IZ KONVEKSNE U KONKAVNU I OBRNUTO. PREVOJNA TAČKA SE TRAŽI TAKO ŠTO SE NADJE DRUGI IZVOD U 0. F '' (X) = 0, X = A, F '' (A) = 0. TEOREMA: F(X) = AX
M
+ ... / BX
N
+...
{

M
<
N

X.A Y = 0, M = N X.A Y = A / B, M = N + 1 K.A., M
>
N + 1 KRIVA ASIMPTOTA.

12) PARCIJALNI IZVODI. PARCIJALNI IZVOD PO X F – JE F U OZNACI F ' X, F – JA JE ARGUMENATA X I Y , KOJA SE DOBIJA DIFERENCIRANJEM F- JE F PO X, SMATRAJUĆI Y KONSTANTOM TJ. F ' X (X,Y) = LIM F (X + DX,Y) – F(X,Y) / DX ,
D
X
®
0. ZA PARCIJALNI IZVOD PO X F- JE F KORISTE SE I SLEDEĆE OZNAKE:
d
Z /
d
X,
d
F(X,Y) /
d
X, (
d
/
d
X) F(X,Y), ANALOGNO SE DEFINIŠE PARCIJALNI IZVOD PO Y F- JE F TJ.

F ' Y (X,Y) = LIM F(X,Y +
D
Y) – F(X,Y) /
D
Y,
D
Y
®
0. PARCIJALNI IZVODI DRUGOG REDA. SVAKI PARC. IZVOD PRVOG REDA IMA DVDA PARCIJALNA IZVODA, TAKO DOBIJAMO ĆETIRI PARCIJALNA IZVODA DRUGOG REDA:
d
/
d
X (
d
Z /
d
X) =
d
2
Z /
d
X
2

= F " XX = Z " XX;
d
/
d
Y (
d
Z /
d
X) =
d
2
Z /
d
X
d
Y = F " XY = Z " XY ;
d
/
d
X (
d
Z /
d
Y) =
d
2
Z /
d
Y
d
X = F " YX = Z "YX ;
d
/
d
Y (
d
Z /
d
Y) =
d
2
Z /
d
Y
2
= F " YY = Z " YY. IZVODE F " YX I F " XY NAZIVAMO MEŠOVITI IZVODI. TEOREMA: AKO

SU MEŠOVITI IZVODI DRUGOG REDA F- JE F DVA ARGUMENTA X I Y NEPREKIDNI, ONDA SU MEDJUSOBNO JEDNAKI TJ. VAŽI F '' XY (X,Y) = F '' YX (X,Y).

13) TOTALNI DIFERENCIJAL. NEKA JE F : (X,Y) ® Z DIFERENCIJABLINA F – JA PO X I Y. RAZLIKA DZ = DF(X,Y) = F(X + DX,Y + D Y) – F(X,Y) NAZIVA SE TOTALNI PRIRAŠTAJ F – JE F. TA F- JU F KAŽEMO DA JE DIFERENCIJABILNA U TAČKI M(X,Y) AKO SE NJEN TOTALNI PRIRAŠTAJ
D
F(M) MOŽE PREDSTAVITI U OBLIKU
D
F(M) = A
D
X + B
D
Y +
w
(M)
Ö
D
X
2
+
D
Y
2
, GDE SU A I B KONSTANTE, A
w
NEPREKIDNA F – JA U TAČKI M I JEDNAKA NULI U TOJ TAČKI. LINEARNA KOMBINACIJA PRIRAŠTAJA ARGUMENATA, TJ. IZRAZ A
D
X + B
D
Y, NAZIVA SE TOTALNI DIFERENCIJAL F- JE F U TAČKI M(X,Y). TOTALNI DOFERENCIJAL F – JE F : (X,Y)
®
Z OZNAČAVAMO SA DZ = DF (X,Y). TEOREMA: TOTALNI DIFERENCIJAL F- JE DVA ARGUMENTA JEDNAK JE ZBIRU PROIZVODA PARCIJALNIH IZVODA I DIFERENCIJALA ODGOVARAJUĆIH ARGUMENATA. TEOREMA: DA BI IZRAZ P(X,Y) DX + Q(X,Y) DY BIO TOTALNI DIFERENCIJAL POTREBNO JE I DOVOLJNO DA VAŽI
d

P /
d
Y =
d
Q /
d
X.

14) IZVOD SLOŽENE F- JE , LOGARITAMSKI IZVOD I F- JE DATE U IMPLICITNOM OBLIKU. F(X) = F (F (X)). TEOREMA: AKO F- JA F(X) IMA IZVOD U TAČKI X A AKO F(U) IMA IZVOD U TAČKI U = F(X) , TADA I SLOŽENA F- JA F(X) IMA IZVOD F ' (X) = F ' (F(X) * F ' (X)). DOKAZ:
F
' (X) = LIM
D
X
®
0

F
(X +
D
X) -
F
(X) /
D
X =

LIM
D
X
®
0

F(F(X +
D
X) – F(F(X)) /
D
X = LIM
D

X
®
0

F(F(X+
D
X)) – F(F(X)) / F(X +
D
X) – F(X) * F(X +
D
X) – F(X) /
D
X.

LOGARITAMSKI IZVOD

: KORISTI SE KADA NE ZNAMO DA LI JE STEPENA ILI EKSPONENCIJALNA F- JA. Y = F (X)
G(X)
¤

*LN, LN Y = LN F(X)
G(X)
, LN Y = G(X) LN F(X)
¤

' ,

Y ' / Y

= G ' (X) LN F(X) + G(X) * (F ' (X) / F(X)), Y '

= Y
[
G ' (X) LNF(X) + G(X) * (F ' (X) / F(X))
]
,

Y ' = F(X)
G(X)
[
G ' (X) LNF(X) + G(X) * (F ' (X) / F(X))
]
. JEDNAČINOM F(X,Y) = 0 MOŽE BITI DEFINISANA F- JA G : X
®
Y. JEDNAČINOM F(X,Y,Z) = 0 MOŽE BITI DEFINISANA F – JA G : (X,Y)
®
Z. AKO OVE JEDNAČINE DEFINIŠU NEKE F- JE , ONDA KAŽEMO DA SU TE F- JE DATE U

IMPLICITNOM OBLIKU. PR: X
2
+ XY +Y
2
= 6, 2X + Y + XY ' + 2YY ' = 0, XY ' + 2YY ' = - 2X – Y , Y ' (X + 2Y) = - 2X – Y, Y ' = - 2X – Y / X + 2Y.

15) TANGENTNA RAVAN POVRŠI I NORMALA NA POVRŠ. NEKA JE F- JA F : (X,Y) ® Z DIFERENCIJABILNA U TAČKI (XO,YO). DVE PRAVE KOJE SE SEKU U TAČKI M, ODREDJUJU RAVAN T, KOJA SE NAZIVA TANGENTNA RAVAN POVRŠI S U TAČKI M. TAČKA M JE DODIRNA TAČKA T I POVRŠI S U TAČKI M. JEDNAČINA TANGENTNE RAVNI F- JE F U TAČKI M GLASI Z – ZO = F ' X (XO, YO) (X – XO) + F ' Y (XO,YO) (Y – YO). AKO JE JEDNAČINA POVRŠI S DATA U OBLIKU F(X,Y,Z) = 0 ONDA JEDNAČINA TANGENTNE RAVNI IMA OBLIK F ' X(M) (X – XO) + F ' Y (M) (Y – YO) + F ' Z (M) (Z – ZO) = 0. PRAVA NORMALNA NA TANGENTNOJ RAVNI T U DODIRNOJ TAČKI M NAZIVA SE NORMALA POVRŠI S U TAČKI M. NJENA JEDNAČINA IMA OBLIK X – XO / F ' X (XO, YO) = Y – YO / F ' Y (XO, YO) = Z – ZO / -1 , ODNOSNO X – XO / F ' X (M) = Y – YO / F ' Y(M) = Z – ZO / F ' Z (M).

16) EKSTREMNE VREDNOSTI F- JA DVE PROMENLJIVE. TEOREMA: POTREBNI USLOVI ZA EGZISTENCIJU EKSTREMA. DA BI FUNKCIJA DVE PROMENLJIVE U NEKOJ TAČKI IMALA EKSTREMNU VREDNOST POTREBNO JE DA NJENI PARCIJALNI IZVODI BUDU JEDNAKI NULI. TEOREMA; NAKA JE A=
d
2
Z /
d
X
2
(XO,YO), B=
d
2
Z /
d

X
d
Y (XO,YO), C=
d
2
Z /
d
Y
2
(XO,YO).
d
Z /
d
X (XO,YO) = 0,
d
Z /
d
Y (XO,YO) = 0,
D
= AC – B
2
,
D
>
0 , A
<
0
Þ
Z(XO,YO) JE MAX,
D
>
0, A
>
0
Þ
Z(XO,YO) JE MIN,
D
= 0 , POTREBNA SU DODATNA ISPITIVANJA.

17) PRIMITIVNA F- JA I NEODREDJENI INTEGRAL. DEF: PRIMITIVNA F – JA F- JE F(X) JE

F(X) TAKVA DA JE F ' (X) = F(X). TEOREMA: AKO JE F(X) PRIMITIVNA F- JA ONDA JE TAKODJE F(X) + C PRIMITIVNA F- JA. TEOREMA: AKO SU F(X) I G(X) PRIMITIVNE F- JE ZA ISTU F- JU TADA JE F(X) – G(X) = C. DEF: SKUP SVIH PRIMITIVNIH F- JA F- JE F(X) ZOVE SE NEODREDJENI INTEGRAL I OZNAČAVA SE SA
ò
F(X)DX = F(X) + C. TEOREMA: SVAKA NEPREKIDNA F- JA IMA NEODREDJENI INTEGRAL.

18) OSNOVNE OSOBINE NEODREDJENOG INTEGRALA. (ò F(X) DX) ' = F(X), ò F ' (X) DX = F(X) + C,
ò
[
F(X) + G(X)
]
DX =
ò
F(X) DX +
ò
G(X) DX – ADITIVNOST,
ò
K F(X) DX = K
ò
F(X) DX – HOMOGENOST,
ò
å
KI FI (X) DX =
å
KI
ò
FI (X) DX. ADITIVNOST I HOMOGENOST DAJU LINEARNOST.

19) INTEGRACIJA SMENOM PROMENLJIVIH I PARCIJALNA INTEGRACIJA. **SMENA:**
ò
F(G(X)) G ' (X) DX =
ò

F (U) DU – FORMULA, SMENA: U = G(X), DU = G ' (X) DX. PRIMER:
ò
SIN 2X DX=
ò
SIN T ½ DT= ½
ò
SINT DT = - ½ COS T= - COS 2X/2 + C, SMENA :2X = T, 2DX = DT, DX = ½ DT.
PARCIJALNA: DOKAZ: (UV) ' = U ' V + U V '
¤

ò
- INTEGRIRAMO,
ò
(UV) ' DX =
ò
U ' V DX +
ò
UV ' DX, UV =
ò
V DU +
ò
U DV,
ò
UDV = UV -
ò
VDU. PRIMER:
ò
XE
x
DX = XE
x
-
ò
E
x
DX = XE
x
– E
x
+ C = (X – 1) E
x
+ C, U = X, DU = DX, DV = E
x
DX, V= E
x
.

20) INTEGRACIJA RACIONALNIH F- JA. 1) ò ($A_O X^N + A_1 X^{N-1} + ... + A_N$) DX= A_O (X^{N+1} / N+1) + A

1

(X

N

/ N) +...+ A

N

X +C. 2)

ò

A/ (X – A)

N

DX = A

ò

1 / (X – A)

N

DX = A

ò

1 / U

N

DU = A

ò

U

–U

DU = A (U

–U+1

/ -U +1) + C= A ((X – A)

-U+1

/ 1 – U) + C = (- A / U –1) * (1 / (X – A)

U – 1

) + C. SMENA U = X – A, DU = DX. 3)

ò

DX / AX

2

+ BX + C =

ò

DX / A(X – X1) (X – X2), 3A) X1,X2

Î

R AKO SU BROJEVI REALNI, I =

ò

A / X – X1 DX +

ò

B / X – X2 DX.

21) INTEGRACIJA IRACIONALNIH I TRIG. FJA. NEKA JE R RACIONALNA FJA SVOJIH ARGUMENATA . INTEGRAL. ò R (X, ^{N1} Ö AX + B,...
NK
Ö
AX+ B) DX, SMENOM AX + B = Z
N
, GDE JE N NAJMANJI ZAJEDNIČKI SADRŽALAC BROJEVA N1 , N2,..., NK SVODI SE NA N / A
ò
Z
N – 1
R (1 / A (Z
N
– B) , Z
M1
,...,Z
MK
) DZ, MI = N / NI, 1
£
I
£
K . SLIČNO,
ò
R (X,
N1
Ö
AX + B / CX + D,...
NK
Ö
AX + B / CX + D) DX SMENOM AX + B / CX + D = Z
N
, GDE N IMA ISTO ZNAČENJE KAO U PRETHODNOM INTEGRALU, SVODI SE NA INTEGRACIJU RACIONALNE FJE.

INTEG. TRIG:

AKO JE PODINTEGRALNA FJA RACIONALNA PO SINX I COSX, ONDA SE SMENOM TAN X/2 = T PODINTEGRALNA FJA SVODI NA RACIONALNU FJU., A A KO JE NEPARNA PO COSX, ONDA SE SMENOM SINX = T PODINTEGRALNI IZRAZ TRANSFORMIŠE U RACIONALNI IZRAZ PO T. A AKO JE NEPARNA PO SINX, ONDA SMENA COSX = T SVODI INTEGRACIJU DATE FJE NA INTEGRACIJU RACIONALNE FJE PO T. A AKO JE PARNA I

PO SINX I PO COSX, ONDA SMENA TANX = T SVODI PODINTEGRALNU FJU NA RAC. FJU PO T. AKO JE PODINTEGRALNA FJA RAC PO TANX , KORISTIMO SMENU X = T. INTEGRALI OBLIKA
ò
SINPXSINQXDX,
ò
SINPXCOSQXDX,
ò
COSPXCOSQXDX, P
1
Q, IZRAČUNAVAJU SE NA TAJ NAČIN ŠTO SE PROIZVOD TRIG FJA POD ZNAKOM INTEGRALA PRETHODNO TRANSFORMIŠE U ZBIR, NA OSNOVU POZNATIH OBRAZACA IZ TRIGONOMETRIJE.

22) DEF. I OSOBINE ODREDJENOG INTEGRALA. ZA FJU F OGRANIČENU SA SEGMENTU [A,B], KAŽEMO DA JE INTEGRABILNA NA TOM SEGMENTU AKO POSTOJI GRANIČNA VREDNOST INTEGRALNE SUME å I = 1,N F(TI)(XI – X I – 1), KAD MAX (XI – X I – 1) ® 0. OVA GRANIČNA VREDNOST NAZIVA SE ODREDJENI INTEGRAL FJE F NA [A,B]

I OZNAČAVA
ò
A
B
F(X) DX. SEGMENT
[
A,B
]
JE OBLAST INTEGRACIJE, BROJ A DONJA, A BROJ B GORNJA GRANICA ODREDJENOG INTEGRALA, FJA F JE PODINTEGRALNA FJA. TEOREMA: AKO JE FJA F INTEGRABILNA NA SEGMENTU I, ONDA JE I

FJA
|
F

|
INTEGRABILNA NA ISTOM SEGMENTU. TEOREMA: FJA F, NEPREKIDNA NA SEGMENTU I, INTEGRABILNA JE NA TOM SEGMENTU. TEOREMA: AKO JE FJA F OGRANIČENA NA SEGMENTU I I NA NJEMU IMA KONAČAN BROJ TAČAKA PREKIDA, ONDA JE ONA INTEGRABILNA NA TOM SEGMENTU.

OSOBINE INT:

ò
A
B
F(X) DX = 0,

ò
A
B
F(X) DX = -

ò
A
B
F(X) DX,

ò
A
B
F(X) DX =

ò
A
C
F(X) DX +

ò
C
A
F(X) DX.