23) VEZA ODREDJENOG INTEGRALA I PRIMITIVNE FJE – NJUTN – LAJBNICOVA FORMULA. TEOREMA: AKO JE FJA F INTEGRABILNA NA SEGMENTU [A,B] I IMA NA TOM SEGMENTU PRIMITIVNU FJU F, TADA JE

$$\int_A^B F(X)\,DX = F(B) - F(A).$$ PIŠE SE

$$\int_A^B F(X)\,DX = F(X) \Big|_A^B = F(B) - F(A).$$ NEKA SU U I V DVE DIFERENCIJABILNE FJE NA [A,B] TADA JE

$$\int_A^B U\,DV = UV \Big|_A^B - \int_A^B V\,DU.$$

24) METODE IZRAČUNAVANJA ODREDJENOG INTEGRALA. METODA PRAVOUGAONIKA BAZIRA DIREKTNO NA DEFINICIJI POJMA ODREDJENOG INTEGRALA. ZA

APROKSIMATIVNE VREDNOSTI ODREDJ. INT. MOŽEMO UZETI:
ò
A
B

F (X) DX
»

(B –A) / N
[
F(A) + F(X1)+...+ F(X
N – 1
)
]
, ILI
ò
A
B

F (X) DX
»

(B –A) / N

[
F(X1) + ...+ F(X
N – 1
) + F(B)
]
. KOD
TRAPEZNE METODE
UMESTO PRAVOUGAONIKA ZA APROKSIMACIJU KORISTIMO TRAPEZE. DEO KRIVOLONIJSKOG TRAPEZA AABB IZMEDJU PRAVIH

X = X I – 1 I X = XI ZAMENJUJEMO TRAPEZOM OSNOVICA F (XI – 1) I F(XI) I VISINOM XI – XI – 1, TAKO DA JE

ò
A
B

F (X) DX
»

å
I = 1, N

(F (XI – 1) + F(XI) / 2) (XI – XI – 1). AKO JE SEGMENT
[
A,B
]
PONOVO PODELJEN NA N JEDNAKIH DELOVA H = (B – A) / N, GORNJA FORMULA DOBIJA OBLIK.
ò
A
B

F (X) DX
»

(B –A) / N
[
F(A) + F(B) / 2 +
å
I = 1, N – 1 F (XI)
]
. KOD
METODE PARABOLE
POVRŠINU KRIVOLINIJSKOG TRAPEZA KRIVE F NAD SEGMENTOM
[
X 2K – 2, X 2K
]
ZAMENJUJEMO POVRŠINOM KRIVOLINIJSKOG TRAPEZA PARABOLE Y = A
K
X
2
+ B
K
X + C
K

NAD ISTIM SEGMENTOM. DOBIJAMO FORMULU:
ò
A
B

F (X) DX
»

(B –A) / 6N
[
F(A) + F(B) + 4

å
I = 1, N F(X 2K – 1) + 2
å
I = 1,N F(X 2K)
]
. TO JE SIMPSONOVA F – LA.

25) IZRAČUNAVANJE DUŽINE LUKA KRIVE, POVRŠINE I ZAPREMINE ROTACIONOG TELA. ZAPREMINA TELA NASTALOG ROTACIJOM TRAPEZA AABB OKO 0X OSE IZRAČUNAVA SE POMOĆU F – LE: V = p ò $_A^B$ F(X) ^{2} DX. DUŽINA LUKA AB KRIVE F DATA JE, U DEKARTOVIM I U POLARNIM KOORDINATAMA, REDOM SA L =
ò
A
B
Ö
1 + F ' (X)
2
DX, L =
ò
a
b
Ö
R
2
+ R '
2
D
j
. POVRŠINA POVRŠI NASTALE ROTACIJOM LUKA AB OKO 0X OSE DATA JE SA P = 2
p
ò
A
B
|
F(X)
|
Ö
1 + F ' (X)
2

DX.

26) UOPŠTENI INTEGRAL. POJAM ODREDJENOG INTEGRALA MOŽE SE UOPŠTITI: POSMATRAJMO FJU F DEFINISANU NA POLUSEGMENTU [A,B), ZA KOJI VAŽI: 1) F – JA F JE INTEGRABILNA NA PROIZVOLJNOM SEGMENTU [A,T] , GDE JE T < B, 2) F- JA F JE NEOGRANIČENA U OKOLINI TAČKE B ILI JE B = ¥ . AKO POSTOJI KONAČNA GRANIČNA VREDNOST LIM ò A T F(X) DX , T ® B, UZIMAMO DA JE I = ò A B F(X) DX = LIM T ® B ò A T F(X) DX , I KAŽEMO DA JE INTEGRAL I KONVERGENTAN. U PROTIVNOM KAŽEMO DA JE INT. I DIVERGIRA. OVAKVI INTEGRALI NAZIVAJU SE UOPŠTENI (NEOSVOJIVI) INTEGRALI. ANALOGNO SE DEFINIŠU UOPŠT INTEGRALI ZA DONJU GRANICU ILI ZA OBE GRANICE. PR:

ò - ¥ + ¥

DX / 1 + X2 = ARCTAN X ½

-
¥
+
¥

=
p
/2 – (-
p
/2) =
p
.

27) POJAM DIFERENCIJALNE J – NE, PARTIKULARNOG I OPŠTEG REŠENJE SA GEOMETRIJS INTERPRETACIJOM. JNA U KOJOJ SE PORED ARGUMENATA I NEPOZNATE FJE POJAVLJUJU I IZVODI TE FJE NAZIVA SE DIFERRENCIJALNA JEDNAČINA. DIF. JNA SA JEDNIM SRGUMENTOM NAZIVA SE OBIČNA DIF- JNA, A JEDNAČINA SA VIŠE ARGUMENATA NAZIVA SE PARCIJALNA

DIF- JNA. POD REDOM DIF. JNE PODRAZUMEVAMO NAJVIŠI RED IZVODA KOJI SE POJAVLJUJU U TOJ JNI. OPŠTI OBLIK DIF. JNE N – TOG REDA JE: F (X, Y, Y ',..., Y
(N)
) = 0, GDE JE Y = Y(X). SVAKA F- JA Y : X
®
Y(X) KOJA ZADOVOLJAVA DIF. JNU TJ. KOJA ZAMENOM Y(X) U DIF. JNI SVODI OVU NA IDENTITET, NAZIVA SE REŠENJE (INTEGRAL) DIF. JNE. FJA Y JE DEFINISANA RELACIJOM G(X,Y, C1,C2,...,CN) = 0, I ZADOVOLJAVA JNU F (X, Y, Y ',..., Y
(N)
) = 0 , I KAŽEMO DA JE ONA OPŠTE RNJE TE JNE. RNJE DIF. J – NE KOJE SE DOBIJA IZ OPŠTEG RNJA NA TAJ NAČIN ŠTO SE KONSTANTAMA CI DAJU FIKSNE VREDNOSTI C
I
0
,
1
£
I
£
N NAZIVA SE PARTIKULARNO RNJE DIF. JNE. PARTIKULARNO RNJE DIF. JNE F (X, Y, Y ',..., Y

(N)

) = 0 BIĆE FJA Y ODREDJENA VEZOM G(X,Y, C

1
0

,C

2
0

,...,C

N
0

) = 0. POSTOJE REŠENJA DIF. J – NE KOJA SE NE MOGU DOBITI IZ OPŠTEG RNJA DAVANJEM KOONSTANTAMA ODREDJENIH VREDNOSTI. TAKVA REŠENJA SE NAZIVAJU SINGULARNA RNJA. GEOMETRIJSKI, SVAKO RNJE NEKE DIF. JNE PREDSTAVLJA KRIVU U DEKARTOVOM PRAVOUGLOM KOORDINATNOM SISTEMU. STOGA SE RNJE DIF. JNE ČESTO NAZIVA I INTEGRALNA KRIVA. OPŠTE RNJE DIF.JNE PREDSTAVLJA SKUP (FAMILIJU) INTERALNIH KRIVIH, PRI ČEMU KROZ SVAKU TAČKU RAVNI PROLAZI NE VIŠE OD JEDNE KRIVE TE FAMILIJE.

28) DIF. JNA KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE I HOMOGENA DIF. JNA. NAJJEDNOSTAVNI JA DIF. JNA IMA OBLIK Y ' = F(X), GDE JE F NEPREKIDNA FJA. NJENO RNJE DATO JE SA Y = ò F(X) DX + C. AKO JE U DIF. JNI Y ' = F(X,Y), F – JA F TAKVA DA JE F(X,Y) = G(X) / H(Y) , GDE SU G I H FJE JEDNOG ARGUMENTA ONDA JE H(Y) DY = G(X) DX. U SLUČAJU KADA SE JNA Y ' = F(X,Y) MOŽE NAPISATI U OBLIKU H(Y) DY = G(X) DX, KAŽEMO DA SU U NJOJ PROMENLJIVE RAZDVOJENE. IZ JNE H(Y) DY = G(X) DX SE VIDI DA SE PRIMITIVNE FJE FJA G I H RAZLIKUJU SAMO ZA PROIZVOLJNU KONSTANTU C, TJ.

ò
H(Y) DY =
ò
G(X) DX + C. TO JE OPŠTE RNJE JNE H(Y) DY = G(X) DX. NA OBLIK H(Y) DY = G(X) DX MOŽE SE DOVESTI I DIF- JNA OBLIKA P1(X) Q1(Y) DX + P2(X) Q2(Y) DY = 0. AKO JE P2 (X)

1

0 I Q1(Y)

1

0 IMAMO (Q2(Y) / Q1 (Y)) DY = (- P1(X)

/ P2(X)) DX. DIF- JNA OBLIKA Y ' = F (Y / X), NAZIVA SE HOMOGENA DIF- JNA. DA BI REŠILI OVU JNU UVODIMO SMENU Y = XU, GDE JE U NOVA FJA. IMAMO Y ' = U + XU', TE J – NA Y ' = F (Y / X) DOBIJA OBLIK : U + XU ' = F(U), TJ. X DU =

[
ò
F(U) - U
]
DX. U OVOJ JNI PROMENLJIVE SE

MOGU RAZDVOJITI AKO JE F(U)
1
U, TE DOBIJAMO DU / (F(U) – U) = DX / X. INTEGRACIJA OVE JNE DAJE
ò
DU / (F(U) – U) = LOG
½
X
½
- LOG C. TJ. X = C G(U) . VRAĆANJEM U PRVOBITNU FJU Y DOBIJAMO ZA OPŠTE RNJE JNE

Y ' = F (Y / X) IZRAZ X = C G(Y/ X). AKO JE F(U) = U ONDA SU U Y ' = F (Y / X) PROMENLJIVE VEĆ RAZDVOJENE. DIF. JNA OBLIKA Y ' = F (AX + BY + C / AX + BY + C) MOŽE SE SVESTI NA JNU Y ' = F (Y / X).

29) LINEARNA DIF. J – NA I REDA. DIF. JNA OBLIKA A_0 (X) Y ' + A_1 (X) Y + A_2(X) = 0, GDE SU AI, I = 0,1,2 DATE FJE, NAZIVA SE LINEARNA DIF. JNA. DELJENJEM

JNE A
0
(X) Y ' + A
1
(X) Y + A
2
(X) = 0 SA A
0
1
0 DOBIJAMO EKVIVALEN JNU JEDNOSTAVNIJEG OBLIKA Y ' + PY + Q = 0, GDE JE P = P(X) = A1 (X) / A0(X), Q = Q(X) = A2(X) / A0(X).. NEKA SU U I V DVE DIFERNCIJABILNE FJE SRGUMENTA X. FJE U I V ODREDIĆEMO TAKO DA Y = UV

BUDE RNJE JNE Y ' + PY + Q = 0 . IZ Y = UV

DOBIJAMO Y ' = U ' V + U V '. ZAMENJUJUĆI Y I Y '

DOBIJAMO U ' V + U V ' + PUV + Q = 0 ILI U ' V + U (V ' + PV) + Q = 0. ODREDIMO FJU TAKO DA BUDE V ' + PV = 0. TADA SE JNA U ' V + U (V ' + PV) + Q = 0 SVODI

NA U ' V + Q = 0. IZ JNE V ' + PV = 0 DOBIJAMO REDOM DV / V = - PDX, LOG
½
V
½
= -
ò
P DX, V = E
-
ò
P DX
= EXP (-
ò
P DX). AKO ZAMENIMO POSLEDNJU JEDNAČINU U U ' V + Q = 0 DOBIJAMO JNU

U ' EXP (-
ò
P DX) + Q = 0, TJ. DU = - Q (EXP
ò
P DX) DX. INTEGRACIJOM DOBIJAMO U = C -
ò
Q E
ò
P DX
DX. ZAMENOM U I V IZ PRETHODNIH JEDNAČINA U Y = UV

DOBIJAMO OPŠTE REŠENJE LINEARNE DIF. JNE Y ' + PY + Q = 0 U OBLIKU Y = E
-
ò
P DX
(C -
ò
Q E
ò
P DX
DX). MOŽE SE NAPISATI I U OBLIKU Y = CF1(X) + F2(X), TJ. KAO LINEARNA FJA INTEGRACIONE KONSTANTE.

30) BERNULIJEVA DIF. JNA. DIF. JNA OBLIKA A0 (X) Y ' + A1(X) Y + A2(X) Y ^{R} = 0, R Î R ILI JEDNOSTAVNIJE Y ' + PY + QY
R

= 0 NAZIVA SE BERNULIJEVA DIF. JNA. ZA R = 0 ILI R = 1 JNA Y ' + PY + QY
R

= 0 POSTAJE LINEARNA JNA. AKO JE R
1

0 I R
1

1 UVODIMO SMENU Y = Z
K

, GDE JE Z NOVA NEPOZNATA FJA, A K KONSTANTA. TADA IMAMO Y ' = KZ
K – 1

Z ' I JNA Y ' + PY + QY
R

= 0 POSTAJE KZ
K – 1

Z ' + PZ
K

+ QZ
KR

= 0, TJ. Z ' + (1/K) PZ + (1/K) QZ
KR – K + 1

= 0. AKO UZMEMO DA JE K = 1/ (1 – R) , TADA PRETHODNA JNA GLASI Z ' + (1/K) PZ + (1 / K) Q = 0, A TO JE LINEARNA DIF. JNA. OPŠTE REŠENJE JNE Z ' + (1/K) PZ + (1 / K) Q = 0 IMA OBLIK Z = CF1(X) + F2(X), GDE JE C PROIZVOLJNA KONSTANTA I GDE SU F1 I F2 ODREDJENE FJE. OPŠTE REŠENJE BERNULIJEVE JNE MOŽE SE IZRAZITU U OBLIKU Y = (CF1(X) + F2(X))
1/ (1 – R)

.

31) LINEARNA DIF. JNA II REDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA – HOMOGENA I NEHOMOGENA. HOMOGENA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA: Y $^{(N)}$ + A1Y $^{(N – 1)}$ + A2Y
(N – 2)

+ ...+ ANY = 0, K
N

+ A1K
N – 1

+ A2K

$N - 2$

$+ ...+ AN - 1 K + AN = 0$ – KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA. 1) KORENI REALNI I RAZLIČITI $Y = C1E^{K1X}$

$+ C2E^{K2X}$

$+ ...+ CN E^{KNX}$

– OPŠTE REŠENJE, 2) KOREN K1 JE VIŠESTRUKOSTI P , DEO REŠENJA E^{K1X}

$[C1 + C2X + ...+ CPX^{P - 1}]$

, 3) KOMPLEKSNI KORENI A + IB, A – IB, DEO REŠENJA E^{AX}

$[C_1 COSBX + C_2 SINBX]$

.

NEHOMOGENA

: $Y^{(N)} + A1Y^{(N - 1)} + ...+ ANY = F(X), F(X)_1$

0. REŠENJE NEHOMOGENE JE $Y = Y_{OX}$

– OPŠTE REŠENJE HOM. + Y_P

.

PREPIŠI TABLICU ZA NEHOMOGENU.

32) METODA VARIJACIJE KONSTANATA. OPŠTA LINEARNA JNA DRUGOG REDA IMA OBLIK Y '' + F(X) Y ' + G(X) Y = H (X). I NEHOMOGENA JE JER JE H (X) = 0, AKO JESTE 0 ONDA JE HOMOGENA. OPŠTE RNJE PRETHODNE JNE JE Y = D1Y1 + D2Y2 + Y1F1 + Y2F2. OVA METODA ODREDJIVANJA OPŠTEG RNJA NEHOMOGENE JNE , KAD JE

POZNATO OPŠTE RNJE ODGOVARAJUĆE HOMOGENE JNE, NAZIVA SE (LAGRANŽEV) METODA VARIJACIJE KONSTANATA. OPŠTE RNJE

Y = D1Y1 + D2Y2 + Y1F1 + Y2F2 J – NE Y '' + F(X) Y ' + G(X) Y = H (X) IZRAŽENO KAO ZBIR OPŠTEG RNJA C1Y1 + C2Y2 JNE Y '' + F(X) Y ' + G(X) Y = 0 I JEDNOG PARTIKULARNOG RNJA Y1F1 + Y2F2 J – NE Y '' + F(X) Y ' + G(X) Y = H (X).

33) VIŠESTRUKI INTEGRALI – OSNOVNI POJMOVI. ZBIR å I = 1,N F(XI, YI) D SI, NAZIVA SE N – TA INTEGRALNA SUMA ZA FJU F U OBLASTI D, KOJA ODGOVARA DATOJ PODELI TE OBLASTI NA N PARCIJALNIH OBLASTI I DATOM IZBORU TAČAKA PI,

1
£
I
£
N. GRANIČNA VREDNOST INTEGRALNE SUME
å
I = 1,N F(XI, YI)
D
SI , KAD NAJVEĆI DIJAMETAR PARCIJALNIH OBLASTI TEŽI NULI, NAZIVA SE DVOJNI INTEGRAL FJE F U OBLASTI D I OZNAČAVA SE
ò
ò
D
F(X,Y) DS. IZRAZ F(X,Y) DS NAZIVA SE PODINTEGRALNI IZRAZ, F JE PODINTEGRALNA FJA, D JE OBLAST INTEGRACIJE, A X I Y SU PROMENLJIVE INTEGRACIJE. OSOBINE DVOJNOG INTEGRALA: 1)
ò
ò
D
å
I = 1,N
a

I FI (X,Y) DS =
å
I = 1,N
a
I
ò
ò
D
FI(X,Y) DS; 2)
ò
ò
D
F(X,Y) DS =
å
I = 1,N
ò
ò
DI
F(X,Y) DS, GDE JE D =
È
I = 1,N DI, A DI I DJ, J
1
I NEMAJU ZAJEDNIČKIH UNUTRAŠNJIH TAČAKA. INTEGRALI I =
ò
A
B
DX
ò
Y1
Y2
F(X,Y) DY =
ò
C
D
DY
ò
X1
X2
F(X,Y) DX, NAZIVAJU SE DVOSTRUKI INTEGRALI, A SAM POSTUPAK RAZDVAJANJA GRANICA INTEGRALA NAZIVA SE SVODJENJE DVOJNOG INTEGRALA NA DVOSTUKI.

INTEGRAL
ò
ò
D
F(X,Y) DS MOŽE SE IZRAČUNATI I PRELASKOM NA POLARNE KOORDINATE. FORMULA

ZA TREŽANSFORMISANJE DVOSTRUKOG INTEGRALA IZ DEKARTOVOG PRAVOUGLOG KOORDINATNOG SISTEMA U POLARNI GLASI : I =
ò
ò
D
F(X,Y) DXDY =
ò
ò
D
F(R COS
j
, R SIN
j
) R DR D
j
. TROJNI INTEGRAL OBELEŽAVAMO I =
ò
ò
ò
W
F(X,Y,Z) DV. INTEGRAL I =
ò
A
B
DX
ò
Y1
Y2
DY
ò
Z1
Z2
F (X,Y,Z) DZ NAZIVA SE TROSTRUKI INTEGRAL.

34) OSNOVNI POJMOVI O REDOVIMA. NEKA JE (AN) REALAN NIZ. IZRAZ OBLIKA A1+A2+...+AN+...= å N = 1,¥ AN NAZIVA SE NUMERIČKI RED. BROJEVI A1,A2,...,AN,... SU ČLANOVI REDA, A AN JE OPŠTI ČLAN REDA. NIZ PARCIJALNIH ZBIROVA REDA A1+A2+...+AN+...=
å
N = 1,
¥
AN JE SN = A1+A2+...+AN, ZA RED A1+A2+...+AN+...=
å
N = 1,

¥
AN KAŽEMO DA JE KONVERGENTAN AKO JE NIZ SN = A1+A2+...+AN KONVERGENTAN. U TOM SLUČAJU BROJ LIM SN = S, N
®
¥
NAZIVA SE ZBIR REDA A1+A2+...+AN+...=
å
N = 1,
¥
AN I ZAPISUJE SE S= A1 + A2 + ...+ AN + ... AKO NIZ SN = A1+A2+...+AN NE KONVERGIRA, ONDA RED A1+A2+...+AN+...=
å
N = 1,
¥
AN DIVERGIRA. TEOREMA: AKO RED A1+A2+...+AN+...=
å
N = 1,
¥
AN KONVERGIRA, ONDA KONVERGIRA I RED KOJI SE DOBIJA IZ REDA A1+A2+...+AN+...=
å
N = 1,
¥
AN DODAVANJEM ILI ODUZIMANJEM PROIZVOLJNOG KONAČNOG BROJA ČLANOVA. TEOREMA: AKO RED A1+A2+...+AN+...=
å
N = 1,
¥
AN KONVERGIRA NJOGOV OPŠTEI ČLAN AN TEŽI KA NULI. RED A1+A2+...+AN+...=
å
N = 1,
¥
AN JE RED SA POZITIVNIM ČLANOVIM A ILI POZITIVAN RED AKO JE AN

3
0, N
Î
N. TEOREMA: AKO JE NIZ PARCIJALNIH ZBIROVA POZITIVNOG REDA OGRANIČEN ODOZDO, ONDA JE TAJ RED KONVERGENTAN. ZA RED A1+A2+...+AN+...=
å
N = 1,
¥
AN KAŽEMO DA JE APSOLUTNO KONVERGENTAN AKO JE RED
½
A1
½

+
½
A2
½
+...+
½
AN
½
+... KONVERGENTAN. NEKA JE (UN) NIZ F – JA , GDE JE UN :

D
®
R, D
Í
R. IZRAZ OBLIKA U1(X) + U2(X) + ...+ UN (X) + ... NAZIVA SE FUNKCIONALNI RED. FUNKCIONALNI RED OBLIKA A
0
+ A1(X – X
0
) + A2(X – X
0
)
2
+ ...+ A
N
(X – X
0
)
N
+ ..., GDE SU A0,A1,...,AN,... I X
0
KONSTANTE, NAZIVA SE STEPENI RED. TRIGONOMETRIJSKI RED JE FUNKCIONALNI RED OBLIKA (½) A
0
+
å
N = 1,
¥
(A
N
COS NX + B
N
SIN NX).