

15. KOORDINATE U VEKTORSKOM PROSTORU

Svaka baza vektorskog prostora V naziva se i koordinatni sistem tog prostora. Akko je $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$

jedna baza prostora V , tada se proizvoljan vektor x

x može na jedinstven način prikazati u obliku linearne kombinacije vektora baze B tj.

$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$ ili uobičajenije $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$ Za ovakav vektor kažemo da je prikazan u koordinatnom obliku. Skalari $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazivaju se koordinate vektora u bazi B . Operacije u V sa vektorima u koordinatnom obliku pišu se prema sledećim pravilima:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)_B + (h_1, h_2, \dots, h_n)_B = (x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)_B$$

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n)_B = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)_B$$

Neka je $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ podskup n -dimenzionog vektorskog prostora V . Neka su vektori iz x zadati kao matrice vrste $1 \times n$ i neka je T matrica obrazovana od onih matrica vrsta $n \times n$, tada je skup x linearno nezavistan akko je rang $T = n$.

16. LINEARNI OPERATORI

Neka su U i V vektorski prostor nad istim poljem k i neka je dato preslikavanje $A: U \rightarrow V$.

Preslikavanje A se naziva binarni operator prostora U i prostora V , ako su ispunjeni uslovi:

$$A(x+y) = Ax + Ay \text{ i } A(ax) =$$

a

$$x) =$$

a

Ax. Za svako x, y

$\hat{A}$

V i

"

a

$\hat{A}$

k skup svih ovih linearnih operatora označavamo sa $\text{Hom}(U, V)$. Za operator A

$\hat{A}$

$\text{Hom}(U, V)$ kažemo da je operator vektorskog prostora V .

Za vektorske U, V, W važe sledeća pravila:

1. Ako $A, B \in \text{Hom}(U, V)$ onda $A+B \in \text{Hom}(U, V)$

2. Ako $A \in \text{Hom}(U, V)$ i $\lambda \in k$ onda $\lambda A \in \text{Hom}(U, V)$

3. Ako $A \in \text{Hom}(U, V)$ i $B \in \text{Hom}(V, W)$ onda $BA \in \text{Hom}(U, W)$

Ako su U i V vektorski prostori nad poljem k i $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ baza prostora U svako preslikavanje $f: B \rightarrow V$ može se na jedinstven način produžiti u binarni operator prostora U u prostor V .

17. LINEARNI OPERATORI

Neka je A linearni operator vektorskog prostora U u vektorskom prostoru V skup svih $x \in U$ takvih da je $Ax=0$ naziva se jezgro lin. operatora A . Ako je A lin. operator vektorskog prostora V , onda je A podprostor prostora V .

Dokaz:

Neka su $V_1, V_2 \in A_n$ tada postoje $n_1, n_2 \in U$ takvi da je $V_1 \in A_{n1}, V_2 \in A_{n2}$. Pošto je $A(a_{n1}) = a_{n1} = a_{n1}U_1$ i $A(x_{n2}) = x_{n2} = x_{n2}U_2$

Imamo:

$A(a_{n1} + x_{n2}) = a_{n1} + x_{n2}$ odakle sledi:

$a_{n1} + x_{n2} \in A_n$

Dimenzija vekt. prostora A_n naziva se rang lin. operatora i označava se sa "rang A ".

18. SPECIJALNI OPERATORI

Neka je linearni operator unitarnog vektorskog prostora V . Operator A^* definisan jednakošću $(Ax, y) = (x, A^*y)$, $x, y \in V$ naziva se operator odjungovan operatoru A . Za dati lin. operator A postoji jedan i samo jedan odjungovan operator A^* .

. Za A i B linearne operatore unitarnog vektorskog prostora V važi:

$$1. A^* \in \text{Hom}(U, V)$$

$$2. (A^*)^* = A$$

$$3. (aA)^* = aA^*$$

$$4. (A+B)^* = A^* + B^*$$

$$5. (AB)^* = B^*A^*$$

mat $A^* = (\text{mat } A)^T$. A^* je odjungovana matrica A ako je $A^* = A^T$. Neka je A lin. operator unitarnog vektorskog prostora V , ako je operator A

tj. ako važi:

$AA^* = A^*A$ onda A nazivamo normalan operator. Neka je A lin. operator unitarnog vektorskog prostora V operator A naziva se unitaran ako za $x, y \in V$ važi: $(x, y) = (Ax, Ay)$.

Da bi lin. operator A bio unitaran potrebno je i dovoljno da bude $A^* = A^{-1}$ tj. $A^*A = AA^*$ unitarni operator je i normalan.

19. JEZGRO I SLIKA LINEARNOG OPERATORA

Neka je A lin. operator vektorskog prostora U i vektorski prostor V . Skup svih $u \in U$ takvih da je $Ax=0$ naziva se jezgro li. operatora i označava se sa $\ker A$ (kerner). Ako je A lin. operator vektorskog prostora U i vektorski prostor V onda je $\ker A$ podprostor prostora U . Defekt lin. operatora A u oznaci $\text{def} A$ jeste dimenzija njegovog jezgra tj. $\text{def} A = \dim(\ker A)$. Neka je A lin. operator vektorskog prostora U i vektorski prostor V . Slika prostora U u oznaci AU jeste skup $AU = \{Au \mid u \in U\} \subseteq V$.

Ako je A lin. operator vektorskog prostora U i vekt. prostor V , onda je AU podprostor V . Dimenzija vekt. prostora AU naziva se rang lin. operatora A i označava se sa $\text{rang } A$.

$$\dim U = \text{rang } A + \text{def } A.$$

20. INVERZNI OPERATORI

Neka je A lin. operator vekt. prostora V , kažemo da A ima inverzan operator ako postoji preslikavanje: $A^{-1}: V \rightarrow V$ takvo da za svaki vektor $x \in V$ važi: $A^{-1}(Ax) = A(A^{-1}x) = x$.

Lin. operator A vekt. prostora V ne može imati više od jednog inverznog operatora. Inverzni operator je takođe lin. operator. Lin. operator A vekt. prostora V ima inverzan operator A^{-1} ako jednačina $Ax=y$ ima jedinstveno rešenje po x za svako $y \in V$.

Da bi lin. operator A vekt. prostora V imao inverzan operator A^{-1}

potrebno je i dovoljno da bude $\det A \neq 0$. Potreban i dovoljan uslov da bi lin. operator A imao inverzni operator A^{-1}

jest da matrica tog operatora u odnosu na proizvoljnu bazu prostora V bude regularna.

21. SOPSTVENE VREDNOSTI LINEARNOG OPERATORA

Ako je A lin. operator vekt. prostora V nad poljem K , vektor $x \in V$ ($x \neq 0$) nazivamo sopstveni vektor lin. operatora. Ako postoji skalar λ

$\hat{A}$
 k takav da je $Ax = kx$
 k
 x skalar
 k
 naziva se odgovarajuća sopstvena vrednost.

Sopstveni vektori lin. operatora A koji odgovara različitim sopstvenim vrednostima, linearno su nezavisni. Ako je λ sopstvena vrednost lin. operatora A onda je: $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ (Kej – Hamiltonova teorema).

Svaka matrica A je nula svog polinoma, tj. ako je: $\det(A - \lambda I) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$, onda je: $a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$. Svaki lin. operator A vekt. prostora V ima jedan i samo jedan minimalan polinom i on je delitelj karakterističnog polinoma.

22. UNITARNI VEKTORSKI PROSTOR

Za V kažemo da je unitarni vektorski prostor ako je definisano preslikavanje koje zadovoljava sledeće uslove:

$$(x, y) = (y, x)$$

$$- (ax, y) = a(x, y)$$

$$- (x+y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$- (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \text{ akko } x=0$$

Za proizvoljne vektore $x, y, z \in V$ i proizvoljan skalar $a \in \mathbb{R}$, skalar (x, y) nazivamo skalarni proizvod vektora x i y . Ako je $k \in \mathbb{R}$ kažemo da je V realan unitaran prostor. Preslikavanje skupa V u skup $\mathbb{R}$

0
+

koje svakom vektoru x

$\hat{=}$

V dodeljuje nenegativan realan broj u oznaci

|

|

x

|

|

=

$\hat{=}$

$\|x\|$ naziva se norma vekt. prostora.

Za normu važi nejednakost $|(x, y)| \leq \|x\| \times \|y\|$ (Koši-Švarcova nejednakost). Za normu važi i:

$$- \|x\| \geq 0$$

$$- \|x\| = 0 \text{ ako } x=0$$

$$- \|ax\| = |a| \|x\|$$

$$- ||x+y|| = ||x|| + ||y||$$

U unitarnom vekt. prostoru V važi nejednakost paralelograma: $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$

23. ORTOGONALNOST

Za vektore x i y u unitarnom vektorskom prostoru V kažemo da su ortogonalni ako je $(x, y) = 0$. Kažemo da je skup vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ unitarnog vektorskog prostora V ortogonalan ako su svaka dva različita vektora iz tog prostora ortogonalna. Ortogonalan skup vektora različitih od nule linearno je nezavistan.

Svaki unitarni vektorski prostor ima ortogonalnu bazu $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. $c_1 = b_1$; $c_2 = b_2 + ac_1$ Skalar a binoma $(c$

$$\begin{matrix} 2 \\ ,c \\ 1 \\)=0 \end{matrix}$$

$$0 = (c_2, c_1) = (b_2 + ac_1, c_1) = (b_2, c_1) + a(c_1, c_1)$$

$$a = -((b_2, c_1) / (c_1, c_1)) = -((b_2, b_1) / (b_1, b_1))$$

Pod pretpostavkom da su određeni ortogonalni vektori $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ i $c_k = b_k + a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_{k-1} c_{k-1}$

izborom skalara

 a_1
 a_2
 a_3
 a_4
 a_5
 $\dots$
 a_{k-1}
 a_k

tako da c_k

 c_k

bude ortogonalna sa vektorima $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$

 c_1
 c_2
 c_3
 $\dots c_{k-1}$
 c_k

tako da $(c_k, c_i) = 0$

 c_k
 c_i
 i

$= 0$ imamo: $0 = (c_k, c_i)$

 c_k
 c_i
 i

$= (b_k, c_i)$

 c_k
 $+$
 a_1
 c_1
 c_2
 c_3
 $\dots$
 a_{k-1}
 c_{k-1}
 c_k
 i

$+$

 a_1
 c_1

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kk} \end{pmatrix}$$

24. LINEARNE FUNKCIONELE

Lin. funkcionele L nad podprostorom V je preslikavanje skupa V u skup K za koji važi:

$$L(ax+xy)=aLx+xLy, \text{ gde je } x,y \in V; a,x \in K.$$

U n -dimenzionalnom prostoru V linearna funkcionela L ima reprezentaciju: $Lx=\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$ gde su $x_1, x_2, \dots$

x
 n
 koordinate vektora x u odnosu na bazu B , a
 a
 1
 $,$
 a
 2
 $, \dots$
 a
 n
 su skalari koji zavise od vektora x .

Linearna funkcionala L na unitarnom vektorskom prostoru V ima reprezentaciju: $Lx = (x, a)$ gde je $a \in V$ vektor jednoznačno određen funkcionalom L .

Dokaz:

$$Lx = \sum a_i x_i$$

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]_B$$

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n]_B$$

$$(x, a) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

25. NORME VEKTORA I MATRICA

Neka je V podprostor nad poljem K i $m: V \rightarrow \mathbb{R}$. m se naziva vektorska norma, ako važi:

$$1) m(x) \geq 0 \quad \forall x \in V$$

$$2) m(ax) = |a| m(x) \quad \forall a \in K, x \in V$$

$$3) m(x+y) \leq m(x) + m(y) \quad \forall x, y \in V$$

Jedna klasa vektorskih ravni definisana je sa:

Norma $\|\cdot\|_1$ naziva se 1-norma, apsolutna

Norma $\|\cdot\|_2$ naziva se 2-norma, sferna

Norma $\|\cdot\|_3$ naziva se 3-norma, maksimum

Za dve vektorske norme m_1, m_2 postoje pozitivne konstante m i M takve da za svaki vektor x važi: $m m_1(x) \leq m_2(x) \leq M m_1(x)$

Neka je $m: K^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$ tada je m matrična norma ako važi:

$$1) m(A) \geq 0 \quad \forall A \in K^{n,n}$$

$$m(A)=0 \text{ ako } A=0$$

$$2) m(aA) = |a|m(A) \text{ ; } a \in K, A \in K^{n,n}$$

$$3) m(A+B) \leq m(A) + m(B) \text{ ; } A, B \in K^{n,m}$$

$$4) m(AB) \leq m(A)m(B) \text{ ; } A, B \in K^{n,m}$$

Za matričnu normu $\| \cdot \|_{K^{n,m}}$ kažemo da je saglasna sa vektorskom normom ako:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\|A\| = \sup (\|Ax\| / \|x\|)$$

26. KONGRUENCIJA VEKTORA I MATRICA

Niz vektora $x^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]$ $k=1, 2, \dots$ kongruencija ka vektoru $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ akko je " ;
 $i=1, 2, \dots, n$

Vektor x nazivamo graničnu vrednost niza $x_i^{(k)}$ ($i=1, 2, \dots$) i pišemo $\lim x^{(k)} = x$

Niz matrica $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]_n$ ($k=1,2,\dots$) konvergira ka $A=[a_{ij}]_n$ akko "i,j važi: $\lim a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$

Matrica A naziva se granična vrednost niza $A^{(k)}$ ($k=1,2,\dots$) i pišemo $\lim A^{(k)} = A$

Red vektora $x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)} + \dots$ je konvergentan akko postoji $\lim (x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(k)})$ nad $k \in \mathbb{N}$ i to granična vrednost se naziva suma datog reda. Analogno se definiče kongruencija reda matrica.

Neka je A

(k)

konvergentan niz matrica $\lim_k A^{(k)}$

$=A$, ako je b vektor, B matrica, onda je:

$$\lim (A^{(k)}b) = Ab$$

$$\lim (A^{(k)}B) = AB$$

$$\lim (BA^{(k)}) = BA$$

27. DIREKTNI POSTUPCI

To su postupci kod kojih se posle konačnog broja računskih operacija, ukoliko nema grešaka zaokruživanja, dolazi do rešenja. Dva sistema linearnih jednačina su ekvivalentna ako je svako rešenje prvog rešenja i drugog. Elementarne transformacije sistema linearnih jednačina su:

- 1) zamena dve jednačine
- 2) množenje jedne jednačine brojem različitim od nule
- 3) dodavanje jedne jednačine množene nekim brojem u drugoj jednačini

Primenom elementarnih transformacija dobija se ekvivalentan sistem. Najvažniji direktan postupak za rešavanje lin. jednačina je Gaus-Zajdelov postupak. Elementarnim transformacijama sistem $Ax=D$ se transformiše u sistem matrice. Gde je gornja trougaona matrica reda 5 sa elementima na glavnoj dijagonali različitim od nule.

$$u \times c_1 + v \times c_2 = b_1$$

$$0c_1 + 0c_2 = b_2$$

28. ITERATIVNI POSTUPCI

Postupci za rešavanje sistema lin. jednačina. Deliimo ih u dve grupe: direktne i iterativne. Kod iterativnih postupaka rešenje sistema lin. jednačina se dobija kao granična vrednost jednog beskonačnog niza vektora.

- Imamo sistem jednačina $Ax=b$ gde je $A=[a_{ij}]_n$ regularna matrica, $b=b[b_i]_n$. Sistem $Ax=b$ se može napisati u obliku ekvivalentnog sistema x

$$x_{n+1} = mx$$

gde je m kvadratna matrica, a d je n -dimenzionalni vektor.

- Polazeći od sistema $x_{n+1}=mx_n+d$ sa početnim vektorima $x^0 \in \mathbb{R}^k$ obrazujemo niz vektora $x^0, x^{(1)}, \dots$

$x^{(k)}$

prema formuli: $x^{(k+1)}$

$x^{(k+1)}$

$$x^{(k+1)} = mx^{(k)} + d$$

$x^{(k)}$

$+d, (k=0,1,2,\dots,n)$ ova formula se naziva iterativno pravilo a za svako fiksno "k" predstavlja iterativan korak.

- Matrica A iz sistema $Ax=b$ se može napisati i u obliku $A=N-P$. Tada imamo: $Nx=Px+b$ ova formula definiše dalji iterativni postupak: $x^{(k+1)}=N^{-1}Px^{(k)}+N^{-1}b$ Gaus-iterativni postupak

Takođe imamo tj. postoji i Fokobijev koji je sličan prethodnom.

29. SOPSTVENE VREDNOSTI I VEKTORI MATRICA

Ako je data kvadratna matrica A treba odrediti sve skalare λ i nenula vektor x tako da važi: $Ax=\lambda x$

λ

-sopstvena vrednost matrice A , x -nenula vektor, sopstveni vektor matrice koji odgovara sopstvenoj vrednosti.

Sopstvene vrednosti matrice A su nule karakterističnog polinoma matrice A . $\det(A - \lambda I) = 0$. Ako je λ sopstvena vrednost matrice A onda homogeni sistem matričnih jednačina $(A - \lambda I)x = 0$ imamo bar jedno netrivialno rešenje x i svako takvo rešenje je sopstveni vektor matrice A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ .

Postupak za određivanje koeficijenta karakterističnog polinoma date matrice.

Ako je $A = [a_{ij}]_n$ ako je $f(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$ karakterističan polinom matrice A onda na osnovu Kejli-Hamiltonove teoreme imamo:

$$b_n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I = 0$$

Rešavanjem ovog sistema mogu se dobiti koeficijenti karakterističnog polinoma matrice A .

30. OSNOVNI POJMOVI O GRAFU

Neka je V neprazan skup i r binarna relacija na V . Uređeni par $G = (V, r)$ naziva se graf. Elementi skupa V jesu čvorovi, a elementi skupa

r jesu grane grafa. Čvorovi a i b su krajevi grane (a, b) . Svaka grana $n = (a, b)$ naziva se orijentisana grana koja izlazi iz čvora a , a ulazi u čvor b .

Grana $n(a,b)$ je sused na čvoru a i izvoru b . Čvor koji nije susedan nijednoj grani je izolovan čvor. Ulazni stepen čvora jednak je broju grana koje ulaze u čvor, izlazni stepen broju grana koje izlaze. Dva grafa $G_1=(V_1, r_1)$ i $G_2=(V_2, r_2)$ su izomorfni ako postoji bijekcija: $f:G_1 \rightarrow G_2$ takvo da je: (

"

a,b

$\hat{I}$

V

1

$) (a,b)$

$\hat{I}$

r

1

$\hat{U}$

$(f(a), f(b))$

$\hat{I}$

r

2

.

31. POVEZANOST GRAFOVA

Put S dužine k u grafu jeste svaki niz grana $n_1, n_2, \dots, n_k$ koji ima sledeće osobine:

1) Grana n_1 prolazi iz proizvoljnog čvora grafa

2) Grana n_i ($i=1, 2, \dots, k$) počinje u onom čvoru u kojem se završava grana n_{i-1} . Put koji se završava u istom čvoru u kojem i počinje nazive se kružni put.

Ako put povezuje čvor a sa b i ako je a početni, a b krajnji onda su čvorovi a i b povezani. Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je nepovezan. Nepovezan graf se sastoji od dva ili više odvojena dela, koji se nazivaju komponente povezanosti grafova. Svaki

neorijentisani graf je unija svojih komponenti povezanosti. Artikulacioni čvor grafa je čvor čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenti povezanosti grafa. Blok grafa je svaki njegov maksimalno povezan podgraf bez artikulacije čvorova.

32. STABLO

Povezan, neorijentisan graf koji ne sadrži konture naziva se stablo. Svaka dva čvora u stablu T spojena su jedinstvenim elementarnim putem. Svako stablo ima bar dva viseća čvora i bar jednu viseću granu. Svaki povezan i neorijentisan graf bez petlji sadrži delimičan graf oblika stabla. Da bi povezan graf bio stablo, potrebno je i dovoljno da broj njegovih grana bude za jedan manji od broja čvorova.

33. PLANIRANI GRAFOVI

Ako se graf G može nacrtati u ravni tako da mu se grane ne seku kažemo da je to planarni graf, tj. planirani graf se može predstaviti na ravni tako da samo čvorovi budu zajedničke tačke grana i to samo čvorovi koji su na krajevima tih grana.

Ako se planirani graf ovako predstavi u ravni onda on deli ravan na više konačnih otvorenih oblasti i jednu beskonačnu oblast.

Povezan planirani graf sa n čvorova i m grana deli ravan $m-n+2$ oblasti. U planarnom grafu postoji bar jedan čvor stepena manjeg od 6.