Sadržaj:

Uvod

Osnovno sredstvo sporazumjevanja među ljudima je jezik. Razlikujemo više vrsta jezika sporazumjevanja, kao što su npr. slikarski, muzički, obični govorni i književni jezik. Matematički jezik je najviši oblik naučnog jezika.

Za razliku od npr. slikarskog jezika, metematici je potreban jezik pomoću koga se izražavamo i sporazumjevamo bez dvosmislenosti i nedorečenosti. Zadatak matematičke logike je proučavanje, istraživanje i stalna dogradnja takvog matematičkog jezika, tj. jezika simbola kao sredstva za razvijanje mišljenja, rasuđivanja, zaključivanja i komuniciranja u matematici.

Najsličniji matematičkom jeziku su govorni i književni jezik. Osnovu ovih jezika čine glas, slovo, riječ i rečenica. Nešto slično važi i za matematički jezik u kome osnovu čine matematički izrazi ili termini. Najprostiji matematički izrazi su konstante i promjenjive.

Konstante su potpuno određeni matematički objekti, tj. veličine kojima se vrijednost ne mjenja, npr. –8, 0, 2, 2/3, 5..........

Promjenjive su simboli koji mogu predstavljati bilo koji elemenat iz nekog datog skupa. Dati skup se naziva oblast definisanosti promjenjive. Konstante kojima se zamjenjuju promjenjive nazivaju se vrijednosti promjenjivih.

Matematičke formule koje sadrže promjenjive kojima vrijednost nije definisana i za koje se zbog toga nemože jednoznačno utvrditi vrijednost istinitosti, su neodređeni iskazi i nazivaju se iskazne forme, iskazne funkcije, ili predikati. Predikati postaju iskazi kada se u njima na mjesto promjenjivih uvrste konstante, tj. vrijednosti promjenjivih. Za predikate sa jednom, dvije, tri, itd. Promjenjivih se kaže da su dužine jedan, dva, tri, itd.

I. Pojmovi i oznake matematičke logike

Zbog preciznosti i kratkoće u izlaganju, u matematici se koriste neki pojmovi i oznake matematičke logike.

Definicija 1. Pod sudom se podrazumjeva iskaz koji ima smisla i za koji važe sljedeća dva principa:

1. (Princip isključenja trećeg). Svaki sud ima bar jednu od osobina istinitosti ili neistinitosti, tj. ne postoji sud koji bi bio i istinit i neistinit.

2. (Princip kontradikcije). Svaki sud ima najviše jednu od osobina istinitosti ili neistinosti, tj. nema suda koji bi bio istinit ili neistinit.

Ovo je opisna, intuitivna, definicija suda.

Prema ovoj definiciji, dakle, svaki sud ima samo jednu vrijednost istinitosti: sud je ili istinit ili n
eistinit
.

Definicija 2: U matematici se istinit sud zove teorema ili stav.

Vrijednost istinitog suda označava se sa ili sa 1, a neistinitog ili 0. Među elementima i
 ,
odnosno
1
I
0,
defini
š

u
se
operacije
od
kojih
su
osnovne
:
konjukcija
,
disjunkcija
,
negacija
,
implikacija
I
ekvivalencija
.

Definicija 3: Svaki složeni sud dobijen primjenom logičkih operacija konjukcije, disjunkcije, neg
acije
,
implikacije
I
ekvivalencije
na
neke
polazne
sudove
naziva
se
formula
.

Definicija 4: ¨Formula koja za sve vrijednosti istinitosti sudova koji ulaze u tu formulu dobiva vri jednost

naziva se tautologija .¨

Definicja 5: ¨Formula koja za sve vrijednosti istinitosti sudova koji ulaze u tu formulu dobiva vrij ednost

naziva se kontradikcija .¨

II. Konjukcija

Ako su P i Q dva suda, sud ¨P i Q¨ zovemo konjukcija (logički proizvod) sudova P i Q i pišemo P ΛQ . Ovaj slo ž eni sud je

istinit
jedino
ako
su
oba
suda
P
I
Q
istinita
,
ina
č
e
je
neistinit
.

Sa p ćemo označavati istinitosnu vrijednost (vrijednost istinitosti) suda P, sa q istinitosnu vrije
dnost
suda
Q
I
sa
$p \wedge q$
istinitosnu
vrijednost
suda
$P \wedge Q$
.
Sa ovim oznakama navedena činjenica pregledno je predstavljena istinitosnom tablicom

p

Q

p	Λq

III. Disjunkcija

Ako su P i Q dva suda, pod sudom ¨P ili Q¨ podrazumijeva se tvrđenje da vrijedi bilo sud P ili sud Q, uz mogućnost da istovremeno vrijede oba.

Ovaj složeni sud zove se disjunkcija (inkluzivna) ili logički zbir sudova P i Q i označava se PVQ. Disjunkcija PVQ je istinita ako je istinit bar jedan od sudova P i Q. Za ovaj slučaj data je istinitosna tablica

p

q

pVq

	[illegible]

Sud ¨P ili Q ali ne oba¨ zove se ekskluzivna disjunkcija. Ovaj se sud izražava sa formulom (P∧Q') V (Q∧P') i obilježava PVQ. Ova definicija predstavljena je istinitosnom tablicom

p

q

p	Vq

[illegible]

[illegible]

	[illegible]

[illegible]

IV. Negacija

Negacija suda P označava se sa P'. Sud P' je istinit ako je sud P neistinit I neistinit ako je sud P istinit. Odgovarajuća istinitosna tablica glasi

p	p'
[illegible]	[illegible]
	[illegible]
[illegible]	

V. Implikacija

Neka su P i Q dva suda. Sud ¨Ako P tada Q¨ zovemo implikacija suda Q sa sudom P, ili implikacija od suda P na sud Q, i to označavamo P=>Q.

Sud ¨Ako P tada Q¨ ima isto značenje kao:

- P je dovoljan uslov za Q

- Q je potreban uslov za P

- iz P slijeduje Q

- sud Q je posljedica suda P

Implikacija P=>Q je neistinita ako i samo ako je P istinito, a Q neistinito, tj. (□ =>□) =□ . Inače je

(□ => □) = (□ => □) = (□ => □) =□

Istinitosna tablica za operaciju implikacija data je shemom. Relacija Q≠> znači da iz Q ne proističe P.

p

q

P=>q

PRIMJER: $a=-1 \Rightarrow a^2 = 1$ $a^2 = 1 \neq a = -1$

VI. Ekvivalencija

Neka su P i Q dva suda. Sud ¨Ako P tada Q i ako Q tada P¨ zove se ekvivalencija suda P sa sudom Q i označava se P ó Q

Sud P ó Q isto znači kao i

- P je ako i samo ako je Q

- P je potreban i dovoljan uslov za Q

Prema tome, ekvivalencija je složen sud (P =>Q) ^ (Q =>P).

Istinitosna tablica za ekvivalenciju glasi:

P

q

P<=>q

	[illegible]

	[illegible]

[illegible]

PRIMJER: a>o =>1/a>0; 1/a>0 => a>0; a>0 ó 1/a>0.

VII. De Morganovi zakoni

(P V Q)’ ó P’ Λ Q’; (P Λ Q)’ ó P’ V Q’

Pokažimo:

P

Q

P V Q

P

Q'

(P V Q)'

P'	**Λ Q'**

$\underline{(P \vee Q)'} = \underline{P' \wedge Q'}$

P V Q $\overline{P} \wedge \overline{Q}$

(P Λ Q)’ ó P’ V Q’

P

Q

P Λ Q

P’

Q’

(P Λ Q)’

P’ V Q’

Dokazali smo da P Λ Q vrijedi.

VIII. Kvantifikatori

Iskaz “za svako a važi a=a” simbolizuje se

(V a), a=a ili V a, a=a

Iskaz “za svako a i b iz skupa C kompleksnih brojeva važi

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$”

simbolizuje se

(V a), (V b) (a, b sЄC) => $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Iskaz “ postoji bar jedno x iz skupa C kompleksnih brojeva tako da je

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1} x + a_n = 0$ ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ ЄC)”

simbolizuje se

(V $a_0, a_1, \ldots, a_n$ Є C) (Э x Є C) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1} x + a_n = 0$.

Iskaz “za svako x postoji bar jedno y takvo da je x<y” simbolizuje se

(V x) (Э y) x<y.

Oznake V (svaki, svi) i Э (postoji bar jedno) zovu se kvantifikatori (kvantori).