

1) funkcije – osnovni pojmovi i vrste. Promenljiva (varijabla) veličina koja može dobiti različite brojne vrednosti. Fja ili preslikavanje je svako pravilo, zakon ili postupak koji daje zavisnos jedne promenljive veličine od neke druge. Za fju $f : a$

®

b , a – domen, b – kodomen (

"

a

$\hat{I}$

$a)($

$\$$

1

b

$\hat{I}$

$b) f(a)=b$, a – original, b - slika. Način zadavanja: tablično, grafički, analitički (flom). $Y=f(x)$ – eksplicitan oblik, $f(x,y)=0$ – implicitan oblik, $x=x(t)$, $y=y(t)$, - parametarski oblik (zavise od t).

Gausova raspodela $y= (1/$

$\ddot{O}$

2

p

$) e$

$-x^2$

, najvažnija raspodela u teoriji verovatnoće.

Specijalne klase funkcija:

def: fja je ograničena odozgo ako postoji broj m tako da je svako x iz domena (

$\$$

M

$)($

"

x

$\hat{I}$

$d) f(x)$

$\pounds$

$m)$. Fja je ograničena sa donje strane (

$\$$

M

$)($

"

x

$\hat{I}$

$d) m$

$\pounds$

$f(x)$. F- ja je ograničena ako je ograničena sa donje i gornje strane. Fja je strogo rastuća ako važi: x_1

$<$

x_2

p

$f(x_1)$

$<$

$f(x_2)$. Fja je strogo opadajuća ako: x_1

$<$

x_2

p

$f(x_1)$

$>$

$f(x_2)$. Fja je rastuća ako x_1

$\mathbb{R}$

x_2

p

$f(x_1)$

$\mathbb{R}$

$f(x_2)$, a opadajuća x_1

$\mathbb{R}$

x_2

p

$f(x_1)$

3

$f(x_2)$ – nije strogo opadajuća

. Monotone fje

: rast, stagnacija, opadanje.

Periodična fja

: p – najmanja (osnovna perioda), $f(x+p) = f(x)$. Teorema : ako je p perioda onda je i $2p, 3p, \dots$

Perioda. Def: fja je parna ako je $f(-x)=f(x)$ za sve x , a neparna ako je $f(-x) = -f(x)$.

$P \cdot p = p, n \cdot n = p, p \cdot n = n$. Inverzna f – ja. $F : a$

$\mathbb{R}$

b bijekcija, f

-1

: b

$\mathbb{R}$

a inverzna fja. $Y=f(x)$

$\hat{U}$

$x=f$

-1

(y) . $F \cdot f$

-1

$= id$ – identična fja. Nacrtaj tablicu! $F(x, x$

n

, a

x

, $\sin x$), $f^{-1}(x,$

n

Ö

$$x = x$$

$$1/n$$

, logax, arcsinx).

Elementarne fje

. Osnovne el. Fje: 1) stepene fje – sama sebi inverzna x

a

, a

î

q, 2) eksponencijalna fje a

x

, a

>

0 3) logaritamska logax, y=a

x

Û

x=logay, 2) i 3) su inverzne, 4) trigonometriji sinx, cosx, tgx, ctgx, , 5) inverz trig fja arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx., 4) i 5) su inverzne.

|

x

|

- nije elementarna fja. Dirihleova fja d(x) =

{

1, x

î

q – racionalna; 0, x

î

i – iracionalna.

racionalne fje

dobijaju se sa +, -, *, :, tu spadaju polinomi (+, -, *, x

n

).

Algebarske fje

, isto kao kod racionalnih samo je dozvoljeno jos x

n

;

n

Ö

x

iracionalne fje.

Su one algebarske fje koje nisu racionalne. Transcedentne fje. Su elementarne f- je koje nisu algebarske.

Hiperboličke fje:

chx – kosinus hiperbolički, chx= (e

x

+ e

$-x$
 $) / 2.$

2) nizovi i granične vrednosti. Def: niz je svako preslikavanje $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}$ iz skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva. Niz se iznačava sa (a_n)

a_n
 $)$
 a_n
 $\hat{=}$
 a_n
 $, (a_n)$
 a_n
 $)$

$n=1$
 $,$
 $n=$
 $\forall$

$, (a_n)$

a_n
 $)$. Okolina tačke broja: okolina $+ \forall$

$(m, + \forall$

$)$, okolina

$- \forall$
 $(- \forall$

$, m)$. Def: tačka c je tačka nagomilavanja niza ako se u svakoj njenoj okolini nalazi beskonačno mnogo članova toga niza. def: niz (a_n)

a_n
 $)$ je konvergentan i konvergira sa a u oznaci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 $\mathbb{R}$
 $\forall$

a
 a_n
 $= a$ ako (a_n)
 "

ϵ
 $>$
 $0) ($
 $\$$
 n
 o
 $\hat{I}$
 $n)($
 $\"$
 n
 $_3$

n
 o
 $)$
 $|$
 a
 n
 $- a$
 $|$
 $<$
 e

. Konvergentan niz se skoro ceo nalazi u proizvoljnoj okolini svoje granične vrednosti. Skoro ceo niz znači ceo niz izuzev mnogo elemenata. Teorema: ako niz ima graničnu vrednost tada je ona jedinstvena $\lim n$

$\textcircled{R}$
 ¥
 a
 n
 $= a$
 $\dot{U}$
 $\lim n$
 $\textcircled{R}$
 ¥
 a
 b
 $= b$
 $\mathcal{P}$

$a=b$. Def: niz he divergentan ako nije konvergentan. Teorema: niz

$\lim a$
 n
 $= a$
 $\mathcal{P}$
 $\lim$
 $|$
 a

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $=$
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $|$
 . Def: niz koji teži nuli zove se nula niz. Def: niz je ograničen sa gornje strane ako je $a_n \leq M$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $<$
 M . Niz je ograničen sa gornje strane ako je $a_n \leq M$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $<$
 a
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 . Niz je ograničen sa gornje i donje strane. Svaki konvergentan niz je ograničen, obrnuto ne mora da važi. $\limsup a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $=$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
 $\lim a_n$
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 – limes superio- najveća tačka nagomilavanja niza, $\liminf a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $=$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
 $\lim a_n$
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 – limes inferior – najmanja tačka nagomilavanja niza. Monotoni nizovi. a_n
 $<$
 $a_{n+1} -$ rastući, a_n
 $>$
 $a_{n+1} -$ opadajući,

a_n
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $a_{n+1} -$ ne opadajući, a_n
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$a_{n+1} -$ ne rastući. Teorema: svaki ograničeni monotoni niz je konvergentan. Teorema: bolcano – vajerštras. Svaki ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja. Teorema: košijev princip konvergencije. (a_n) konvergira akko (

"
 ϵ
 $>$
 $0)($
 $\$$
 n_0
 $\hat{I}$

$n)($
 $\"$
 m, n
 $_3$
 $no)$
 $|$
 $a_m - a_n$
 $|$
 $<$
 ϵ
 $.$

3) granične vrednosti fja i neprekidnost. Def: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a \iff (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) |x - a|$

$|$
 $<$
 δ
 $\mathbb{P}$
 $|$
 $f(x) - a$
 $|$
 $<$
 ϵ
 $. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$
 $\mathbb{R}$
 $\forall$
 $\sin x / x = 1. \lim_{x \rightarrow 0} x$
 $\mathbb{R}$
 $a f(x) =$
 $\pm$
 $\forall$
 $\hat{U}$
 $($
 $\"$
 m
 $>$
 $0)($
 $\$$
 d
 $>$
 $0)$

|
 $x - a$

|
 $<$
 d
 p

$f(x)$
 3

m.

Leva i desna granična vrednost

: $\lim x$

®

a
 $+$

$f(x) = a$
 $+$

, $\lim x$

®

a
 $-$

$f(x) = a$
 $-$

.

Neprekidnost fje.

Def: fja $y = f(x)$ je neprekidna u tački a ako $\lim x$

®

$a f(x) = f(a)$

$\hat{U}$

(

"

e

$>$

0)(

\$

d

$>$

=)

|

$x - a$

|

$<$

d

p

|

$f(x) - f(a)$

|

<
e

. f – ja je neprekidna ako malim promenama argumenata odgovaraju nale promene f je. f ja je neprekidna u intervalu ako je neprekidna u svakoj tački u intervalu.

Tipovi tačaka prekida

. Ako postoji konačna leva i desna granična vrednost f je u tački a i ako su ove vrednosti različite medju sobom tada tačka a se naziva tačka prekida prve vrste. $f(a - 0)$

1

$f(a + 0)$. Ako bar jedna od jednostranih graničnih vrednosti ne postoji ili je beskonačna imamo prekid ddruge vrste. Prekid prve vrste može biti otklonjiv i neotklonjiv.

Osobine neprekidnih f – ja

. Teorema: f ja neprekidna na segmentu

[
a,b
]

je ograničena. Teorema: f ja neprekidna na segmentu

[
a,b
]

dostiže svoj maksimum ili minimum. Def: f – ja je uniformna (ravnomerna) neprekidna u nekom skupu ako (

"

e

>

0)(

\$

d

>

0)

|

$x_1 - x_2$

|

<

d

p

|

$f(x_1) - f(x_2)$

|

<

e

. Teorema: f ja neprekidna na segmentu

[
a,b
]

je uniformno neprekidna na tom segmentu. Teorema: teorema o medjuvrednosti: lema: ako je f ja neprekidna na segmentu

[
a,b
]
i ako $f(a)$ i $f(b)$ imaju suprotne znake tada postoji bar jedna unutrašnja tačka tog segmenta u kojoj je vrednost f jednaka 0. $F(a)$

<
0, $f(b)$
<
0. Teorema: ako je f neprekidna na segmentu

[
a,b
]
i ako su x_1 i x_2 dve različite tačke tog segmenta takav da $f(x_1)$

$f(x_1)$ i ako je c takav da je $f(x_1)$

<
 c
<
 $f(x_2)$ tada postoji tačka

x
 $\hat{=}$

[
a,b
]

tako da je $f($

x
 $) = c$. $F(x) = f(x) - c$, $f(x_1) = f(x_1) - c$

<
0, $f(x_2) = f(x_2) - c$

>
0, iz poslednja 2 sledi lema (

\$
 x

) $f($
 x

) = 0, $f($
 x

) - $c = 0$, $f($
 x

) = c .

4) beskonačno male i beskonačno velike veličine. Def: fja $y = f(x)$ naziva se bv kad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

$f(x) =$

$\pm$

$\neq$

. F- ja $y = f(x)$ naziva se bmv kad $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

∞

a $f(x) = 0$. Teorema: recipročna vrednost bv je bmv i obrnuto. Zbir konačnog broja bm veličina je bm veličina. Proizvod bmv i ograničene fje je bmv. Def:

a

i

b

su bmv, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

∞

a =

a

$(x) /$

b

$(x) =$

{

0,

a

je bmv višeg reda od

b

, const,

a

i

b

su istog reda, 1,

a

i

b

su ekvivalentne veličine,

$\neq$

su neg reda. Def:

a

i

b

su bv, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

∞

$\neq$

a

$(x) /$

b

$(x) =$

{

0,

a
je bvv nižeg reda, const, istog reda, 1 ekvivalentno,
¥
, višeg.

5) izvod f- je sa geometrijskom i fizičkom interpretacijom. Def: izvod fje y= f(x) u tački a je

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Def: izvod fje y= f(x) u tački a je

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Def: izvod fje y= f(x) u tački a je

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Def: izvod fje y= f(x) u tački a je

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Def: izvod fje y= f(x) u tački a je

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a. Izvod fje je granična vrednost ko ličnika

priraštaja fje i priraštaja argumenta.

Gemetrijska i fizička interpretacija izvoda.

Izvod fje u nekoj tački jednak je tangentsu nagibnog ugla tangente na krivu u toj tački.

6) jednačina tangente i normale krivih u ravni. Jed . Tan. T: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, jed nor: $y - f(a) = -1/f'(a)(x - a)$, tg(a) = $f'(a)$.
Jednačina prave kroz tačku $m(x_0, y_0)$,

$y - y_0 = k(x - x_0)$, k – koef. Pravca. Jednačina prave kroz dve tačke (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$. S= s(m,n), m(a,f(a)), n(a +

D

x), f(a +

D

x). Jednačina sečice s: $y - f(a) = (f(a +$

D

x) – f(a) /

D

x) (x – a).

D

x

®

0, n

®

m , s

®

t.

T: $y - f(a) = \lim$

D

x

®

0

(f(a +

D

x) – f(a) /

D

x) (x – a) , $kn = -1/k$. Teorema: dodirni elementi krive: $n = mc =$

|

y

Ö

$1+(y')$

2

|

- normala, $t = ma =$

$\frac{y}{y'}$
 $\frac{1+(y')^2}{2}$
 $\frac{y}{y'}$
 $\frac{1+(y')^2}{2}$
 $\frac{y}{y'}$
 $\frac{1+(y')^2}{2}$
 $\frac{y}{y'}$
 $\frac{1+(y')^2}{2}$

7) pravila za nalaženje izvoda. Teorema: ako su f_i diferencijalne fje, $i = 1, 2, \dots, n$. [$\forall i = 1, n \quad f_i(x)$]

$f' =$
 $\frac{d}{dx}$
 $i = 1, n \quad f_i'(x)$ aditivnost,
 $[$
 $c f(x)$
 $]$
 $f' = c f'(x)$ – homogenost, aditivnost i homogenost daju linearnost. (
 a
 $f(x) +$
 b
 $g(x))' =$
 a
 $f'(x) +$
 b
 $g'(x),$
 $[$
 $f(x) \cdot g(x)$
 $]$
 $f' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$
 $[$
 $f(x) / g(x)$
 $]$
 $f' = (f'(x) g(x) - f(x) g'(x)) / g(x)$

2

.

Izvod inverzne fje.

Teorema:

ako f – ja $y = f(x)$ ima izvod u tački x , x

1

0 i ako je monotona u nekoj okolini tačke x tada inverzna f

- ja $x = f$

-1

(y) ima izvod

[

f

-1

(y)

]

' = $1 / f' (x)$ ili $x' y = 1 / y' x$.

Izvod elementernih f – ja.

$Y = x$

n

, $y' = nx$

$n-1$

, $y' = \lim$

D

x

®

0 ($x +$

D

x)

n

– x

n

/

D

$x = \lim$

D

x

®

0

D

x

[

(

$x +$

D

x)

$n-1$

+ (x +

D

x)

$n-2$

* x + ...x

$n-1$

]

/

D

x= nx

$n-1$

. Tablica izvoda: $x^n = nx^{n-1}$

$n-1$

, $\sin x = \cos x$, $\cos x = -\sin x$, $\ln x = 1/x$, $\arcsin x = 1/\sqrt{1-x^2}$

Ö

1- x

2

, složen izvod:

[

f(x)

]

n'

= n f

$n-1$

(x) f' (x).

Jednostrani izvodi:

$f'_{+}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

D

x

®

0

-

f(x+

D

x) – f(x) /

D

x – sa leve strane, f'

+

(x) = lim

D

x

®

0

$+$
 $f(x +$
 D
 $x) - f(x) /$
 D
 $x -$ sa desne strane , $f'_{-} = f' +$
 P
 $f' = f'_{-} = f' +$. Ako fja ima levi i desni izvod u nekoj tački i ako su oni medjusobno jednaki , taka ona ima izvod u toj tački jednak toj vrednosti.

8) pojam diferencijala i diferencijabilnost fje $y = f(x)$, $y' = dy / dx$, $dx = Dx$, $dy = f'(x) dx$,

D
 y
 $\gg$
 dy . Pod izvodom $f'(a)$ funkcije $f : D$
 $\textcircled{R}$
 r, d
 $\hat{I}$
 r u tački a
 $\hat{I}$
 d podrazumevamo konačnu graničnu vrednost količnika priraštaja fje f i priraštaja argumenata x u tački a , kad priraštaj argumenta teži ka nuli tj. $F'(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} f'(a +$
 D
 $x) - f(a) /$
 D
 x kad x
 $\textcircled{R}$
 a

D
 x
 $\textcircled{R}$
 0. Operacija nalaženja izvoda fje naziva se diferenciranje (derivacija) a deo analize koji proučava teoriju i primene izvoda se naziva diferencijalni račun. Fja f je diferencijabilna u tački a ako se njen priraštaj u a može predstaviti u obliku $f(x) - f(a) = a(x - a) +$

w
 $(x) (x - a)$, gde je a
 $\hat{I}$

r . Da bi fja f bila diferencijabilna u tački a potrebno je i dovoljno da ima izvod u a . Diferencijabilna funkcija u nekoj tački je i neprekidna u toj tački. Neka su $f(x)$

i $g(x)$ diferencijabilne fje u nekoj oblasti d , tada važi: 1)

$$\left(\int_a^b f(x) + g(x) \right)' =$$

$$\int_a^b f'(x) + g'(x), 2)$$

$$\left[\int_a^b f(x) \cdot g(x) \right]' =$$

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), 3)$$

$$\left[\int_a^b f(x) / g(x) \right]' =$$

$$\int_a^b \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2} dx$$

.

9) OSNOVNE TEOREME DIF. RAČUNA: ROLOVA, LAGRANŽEVA, KOŠIJEVA,

LOPITALOVA. TEOREMA (ROLLE) AKO JE $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ DIFERENCIJABILNA FJA I AKO
JE $f(A) = f(B)$ TADA POSTOJI $C \in]A, B[$

TAKO DA JE $f'(C) = 0$.

TEOREMA: (LAGRANGE).

AKO JE f

$[A, B]$

$\in \mathbb{R}$

NEPREKIDNA F –JA I DIFERENCIJABILNA TADA POSTOJI TAČKA $C \in]A, B[$

$\hat{f}$

$[A, B]$

, TAKVA DA JE $f(B) - f(A) / B - A = f'(C)$.

TEOREMA:(KOŠIJEVA).

AKO SU f I g DIFERENCIJABILNE FJE NA INTERVALU

$[$

A,B

]

I AKO BAR JEDNA OD NJIH IMA IZVOD

1

0 TADA POSTOJI TAČKA C TAKVA DA JE

®

(

\$

C) $F(B) - F(A) / G(B) - G(0) = F'(C) / G'(C)$.

TEOREMA: LOPITALOVO PRAVILO.

NEKA SU F I G DIFERENCIJABILNE FJE AKO JE $F(A) = G(A) = 0$ I AKO POSTOJI GRANIČNA VREDNOST SA LIM X

®

$A F(X) / G(X) = \lim F'(X) / G'(X) = L$, TADA POSTOJI GRANIČNA VREDNOST LIM X

®

$A F(X) / G(X) \mid \lim X$

®

$A F(X) / G(X) = \lim F'(X) / G'(X) = L$. TEOREMA: PRIMENA NA NEODRDJENOSTI TIP A "1

¥

", LIM F

G

= E

LN LIM FG

= E

LIMGLNF

= E

LIM G(F - 1)

, LIM X

®

¥

F (X)

G(X)

= E

LIM X

®

A G(X)

[

F(X) - 1

]

.

10) TEJLOROVA I MAKLORENOVA FORMULA. DEF: AKO JE $F(X) \in C^{[U]}[A,B]$, $C^{[U]}(A,B)$ – SKUP FJA DEFINISANIH NA

[
A,B
]
I NEPREKIDNIH ZAJEDNO SA IZVODOM N- TOG REDA $F, F', F'', \dots, F^{(N)}$

, POLINOM $TN(X) = F(A) + (F'(A)/1!)(X - A) + (F''(A)/2!)(X - A)^2$

+ ... + $(F^{(N)}(A)/N!)(X - A)^N$

(A) / N!) (X – A)
N

SE ZOVE TEJLOROV POLINOM FJE

U TAČKI A, ZA $A = 0$ MAKLORENOV POLINOM, TEOREMA: $F(A) = TN(A)$, $F'(A) = TN'(A), \dots, F^{(N)}(A) = TN^{(N)}(A)$

(A)= TN
(N)

(A), TN
(N+1)

(A) = TN
(N+2)

(A) = ...=0. TEOREMA: TEJLOROVA FORMULA. $F(X) = TN(X) + RN(X)$ – OSTATAK, $RN(X) = O((X - A)^{N+1})$

*

w
(X),

w
(X)

Ⓡ

0, X

Ⓡ

A, $RN(X) = (F^{(N+1)}(A)/ (N+1)!)(X - A)$

(
X
) / (N+1)! (X – A)
N+1

, - LAGRANŽEV OBLIK KONSTANTE, A

£

X

£

X, $RN(X) = O((X - A)^{N+1})$

N

– PEANOV OBLIK,

a

= O(

b

),

a

JE BESKONAČNO MALA VELIČINA VIŠEG REDA NEGO

b

, X

3

= O(X), X

3

= O(SINX).

TEJLOROVA FORMULA

: $F(X) = F(A) + (F'(A) / 1!) (X - A) + (F''(A) / 2!) (X - A)^2$

2

+...+ (F

(N)

(A) / N!) (X - A)

N

+ R_N (X).

MAKLORENOVA FORMULA

: $F(X) = F(0) + (F'(0) / 1!) * X + (F''(0) / 2!) * X^2$

2

+ ...+ (F

(N)

(0) / N!) * X

N

+ R_N (X).

11) MONOTONOST, EKSTREMI, KONVEKSNOST I PREVOJNE TAČKE F – JA JEDNE

PROMENLJIVE. OPŠTI POSTUPAK Z AISPITIVANJE F- JA. 1) DOMEN SADRŽI

INTERVALE NEPREKIDNOSTI I TAČKE PREKIDA, 2) NULE, ZNAK FJE, 3) NEPARNOST,

PARNOST, PERIODIČNOST, 4) ASIMPTOTE – PONAŠANJE NA RUBOVIMA ILI

GRANICAMA, 5) ESTREMI, INTERVALI MONOTONOSTI, 6) KONVEKSNOST,

KONKAVNOST, PREVOJNA TAČKA (TAČKA INFLEKSIJE), 7) GRAFIK, TABLICA. 1)

DOMEN Y = $\ddot{O} F(X), F(X) \neq 0, Y = 1/ F(X), F(X) \neq 0, Y = \ln F(X), F(X) > 0, 2)$

Y = 0, F(X) = 0, Y

>

0, Y

<

0, Y(X)

>

0., 3) $F(-X) = F(X)$ – PARNA F – JA, $F(-X) = -F(X)$ – NEPARNA, 4) ASIMPTOTA DATE F – JE $Y = F(X)$ JE NEKA DRUGA F – JA $Y =$

j

(X), AKO VAŽI $\lim_{x \rightarrow \infty} X$

®

¥

[

$F(X) -$

j

(X)

]

$= 0, \lim_{x \rightarrow \infty} X$

®

¥

$F(X) /$

j

(X) JE ASIMPTOTA ZA $F(X)$. DEF: HORIZONTALNA ASIMPTOTA $Y = F(X)$ AKO VAŽI $\lim_{x \rightarrow \infty} X$

®

±

¥

$F(X) = C, Y = C$. DEF: VERTIKALNA ASIMP. $X = A, \lim_{x \rightarrow A} X$

®

A

±

$F(X) =$

±

¥

. DEF:

$Y = F(X)$ KOSA A. $Y = KX + N, \lim_{x \rightarrow \infty} X$

®

±

¥

[

$F(X) - KX - N$

]

$= 0, K = \lim_{x \rightarrow \infty} X$

®

¥

$F(X) / X, N = \lim_{x \rightarrow \infty} X$

®

¥

[
 $F(X) - KX$
]

5) MONOTONOST

. TEOREMA: Y'

>
 0
 P
 Y
 -
 $, Y'$
 <
 0
 P
 Y
 -

, DEF: $F'(A) = 0$, A – STACIONARNA TAČKA, $F(A)$ JE TAČKA MAX AKO (

"
 X
 $\hat{I}$
 $(A - Q, A + Q)) F(X)$

$\mathcal{E}$
 $F(A)$. LOKALNA OSOBINA ZA MAX I MIN. $F(X)$

-
 X
 $\hat{I}$
 $(A - Q, A) , F(X)$
 -

X
 $\hat{I}$
 $(A, A + Q)$
 }
 P
 $F(A)$ JE MAX ;

$F(X)$
 -

X
 $\hat{I}$
 $(A - Q , A) , F(X)$
 -

X
 $\hat{I}$
 $(A, A + Q)$
 }

P
 $F(A)$ JE MIN. TEREMA: $F'(A) = 0, F''(A) > 0$
 $>$
 0
 P
 $F(A)$ JE MIN, $F'(A) = 0, F''(A) < 0$
 $<$
 0
 P
 $F(A)$ JE MAX.

6) KONVEKSOST I KONKAVNOST

. DEF: F – JA JE KONVEKSNA NA NEKOM INTERVALU AKO SE NJEN GRAFIK NALAZI IZNAD TANGENTE U BILO KOJOJ TAČKI TOG INTERVALA. DEF: F – JA JE KONKAVNA AKO SE NJEN GRAFIK NALAZI ISPOD TANGENTE. TEOREMA: Y JE KONVEKSNA

«

$Y''(X)$

3

0 X

↑

(A, B) , Y JE KONKAVNA

«

$Y''(X)$

£

0. DEF: A JE

PREVOJNA TAČKA

F – JE $F(X)$ AKO SE U TOJ TAČKI F – JA MENJA IZ KONVEKSNE U KONKAVNU I OBRNUTO. PREVOJNA TAČKA SE TRAŽI TAKO ŠTO SE NADJE DRUGI IZVOD U 0. $F''(X) = 0, X = A, F''(A) = 0$. TEOREMA: $F(X) = AX$

M

+ ... / BX

N

+...

{

M

<

N

$X.A Y = 0, M = N$ $X.A Y = A / B, M = N + 1$ K.A., M

>

$N + 1$ KRIVA ASIMPTOTA.

12) PARCIJALNI IZVODI. PARCIJALNI IZVOD PO X F – JE F U OZNACI F'_X , F – JA JE ARGUMENATA X I Y , KOJA SE DOBIJA DIFERENCIRANJEM F- JE F PO X, SMATRAJUĆI Y KONSTANTOM TJ. $F'_X(X,Y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(X+\Delta x, Y) - F(X,Y)}{\Delta x}$,

D

X

®

0. ZA PARCIJALNI IZVOD PO X F- JE F KORISTE SE I SLEDEĆE OZNAKE:

d

Z /

d

X,

d

F(X,Y) /

d

X, (

d

/

d

X) F(X,Y), ANALOGNO SE DEFINIŠE PARCIJALNI IZVOD PO Y F- JE F TJ.

$F'_Y(X,Y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(X, Y+\Delta y) - F(X,Y)}{\Delta y}$

D

Y) – F(X,Y) /

D

Y,

D

Y

®

0. PARCIJALNI IZVODI DRUGOG REDA. SVAKI PARC. IZVOD PRVOG REDA IMA DVDA PARCIJALNA IZVODA, TAKO DOBIJAMO ČETIRI PARCIJALNA IZVODA DRUGOG REDA:

d

/

d

X (

d

Z /

d

X) =

d

²

Z /

d

X

²

$$= F'' XX = Z'' XX;$$

$\frac{d}{d}$

$\frac{d}{d}$

$\frac{d}{d}$

$Y($

$\frac{d}{d}$

$Z/$

$\frac{d}{d}$

$X) =$

$\frac{d}{d^2}$

$\frac{d}{d^2}$

$Z/$

$\frac{d}{d}$

X

$\frac{d}{d}$

$$Y = F'' XY = Z'' XY ;$$

$\frac{d}{d}$

$\frac{d}{d}$

$\frac{d}{d}$

$X($

$\frac{d}{d}$

$Z/$

$\frac{d}{d}$

$Y) =$

$\frac{d}{d^2}$

$\frac{d}{d^2}$

$Z/$

$\frac{d}{d}$

Y

$\frac{d}{d}$

$$X = F'' YX = Z'' YX ;$$

$\frac{d}{d}$

$\frac{d}{d}$

$\frac{d}{d}$

$Y($

$\frac{d}{d}$

$Z/$

$\frac{d}{d}$

$Y) =$

$\frac{d}{d^2}$

$\frac{d}{d^2}$

$Z/$

$\frac{d}{d}$

Y

$\frac{d}{d^2}$

$$= F'' YY = Z'' YY. \text{ IZVODE } F'' YX \text{ I } F'' XY \text{ NAZIVAMO MEŠOVITI IZVODI. TEOREMA: AKO}$$

SU MEŠOVITI IZVODI DRUGOG REDA F- JE F DVA ARGUMENTA X I Y NEPREKIDNI, ONDA SU MEDJUSOBNO JEDNAKI TJ. VAŽI $F''_{XY}(X,Y) = F''_{YX}(X,Y)$.

13) TOTALNI DIFERENCIJAL. NEKA JE $F : (X,Y) \in Z$ DIFERENCIJABLINA F – JA PO X I Y.

RAZLIKA $DZ = DF(X,Y) = F(X + DX, Y + DY) - F(X,Y)$ NAZIVA SE TOTALNI PRIRAŠTAJ F – JE F. TA F- JU F KAŽEMO DA JE

DIFERENCIJABILNA U TAČKI $M(X,Y)$ AKO SE NJEN TOTALNI PRIRAŠTAJ

D
F(M) MOŽE PREDSTAVITI U OBLIKU

D
 $F(M) = A$

D
 $X + B$

D
 $Y +$

w
(M)

Ö

D

X

2

+

D

Y

2

, GDE SU A I B KONSTANTE, A

w

NEPREKIDNA F – JA U TAČKI M I JEDNAKA NULI U TOJ TAČKI. LINEARNA KOMBINACIJA PRIRAŠTAJA ARGUMENATA, TJ. IZRAZ A

D

X + B

D

Y, NAZIVA SE TOTALNI DIFERENCIJAL F- JE F U TAČKI $M(X,Y)$. TOTALNI DOFERENCIJAL

F – JE $F : (X,Y)$

®

Z OZNAČAVAMO SA $DZ = DF(X,Y)$. TEOREMA: TOTALNI DIFERENCIJAL F- JE DVA ARGUMENTA JEDNAK JE ZBIRU PROIZVODA PARCIJALNIH IZVODA I DIFERENCIJALA ODGOVARAJUĆIH ARGUMENATA. TEOREMA: DA BI IZRAZ $P(X,Y)DX + Q(X,Y)DY$ BIO TOTALNI DIFERENCIJAL POTREBNO JE I DOVOLJNO DA VAŽI

d

P /
d
Y =
d
Q /
d
X.

14) IZVOD SLOŽENE F- JE , LOGARITAMSKI IZVOD I F- JE DATE U IMPLICITNOM

OBLIKU. $F(X) = F(F(X))$. TEOREMA: AKO F- JA F(X) IMA IZVOD U TAČKI X A AKO F(U) IMA IZVOD U TAČKI $U = F(X)$, TADA I SLOŽENA F- JA $F(X)$ IMA IZVOD $F'(X) = F'(F(X)) \cdot F'(X)$. DOKAZ:

F
' (X) = LIM

D
X
®
0

F
(X +
D
X) -
F
(X) /
D
X =

LIM
D
X
®
0

F(F(X +
D
X) – F(F(X)) /
D
X = LIM
D

X
 $\otimes$
 0

$F(F(X +$
 D
 $X)) - F(F(X)) / F(X +$
 D
 $X) - F(X) * F(X +$
 D
 $X) - F(X) /$
 D
 $X.$

LOGARITAMSKI IZVOD

: KORISTI SE KADA NE ZNAMO DA LI JE STEPENA ILI EKSPONENCIJALNA F- JA. $Y = F$

(X)
 $G(X)$

▪

*LN, $\ln Y = \ln F(X)$
 $G(X)$

, $\ln Y = G(X) \ln F(X)$
 ▪

',

Y' / Y

$= G'(X) \ln F(X) + G(X) * (F'(X) / F(X)), Y'$

$= Y$

[
 $G'(X) \ln F(X) + G(X) * (F'(X) / F(X))$
]

,

$Y' = F(X)$
 $G(X)$

[
 $G'(X) \ln F(X) + G(X) * (F'(X) / F(X))$
]

. JEDNAČINOM $F(X, Y) = 0$ MOŽE BITI DEFINISANA F- JA $G : X$

$\otimes$

Y. JEDNAČINOM $F(X, Y, Z) = 0$ MOŽE BITI DEFINISANA F – JA $G : (X, Y)$

$\otimes$

Z. AKO OVE JEDNAČINE DEFINIŠU NEKE F- JE , ONDA KAŽEMO DA SU TE F- JE DATE U

IMPLICITNOM OBLIKU. PR: X

2

+ XY + Y

2

= 6, $2X + Y + XY' + 2YY' = 0$, $XY' + 2YY' = -2X - Y$, $Y' (X + 2Y) = -2X - Y$, $Y' = -2X - Y / X + 2Y$.

15) TANGENTNA RAVAN POVRŠI I NORMALA NA POVRŠ. NEKA JE F- JA F : (X,Y) ® Z DIFERENCIJABILNA U TAČKI (X₀,Y₀). DVE PRAVE KOJE SE SEKU U TAČKI M, ODREĐUJU RAVAN T, KOJA SE NAZIVA TANGENTNA RAVAN POVRŠI S U TAČKI M. TAČKA M JE DODIRNA TAČKA T I POVRŠI S U TAČKI M. JEDNAČINA TANGENTNE RAVNI F- JE F U TAČKI M GLASI $Z - Z_0 = F'_X (X_0, Y_0) (X - X_0) + F'_Y (X_0, Y_0) (Y - Y_0)$. AKO JE JEDNAČINA POVRŠI S DATA U OBLIKU $F(X,Y,Z) = 0$ ONDA JEDNAČINA TANGENTNE RAVNI IMA OBLIK $F'_X(M) (X - X_0) + F'_Y(M) (Y - Y_0) + F'_Z(M) (Z - Z_0) = 0$. PRAVA NORMALNA NA TANGENTNOJ RAVNI T U DODIRNOJ TAČKI M NAZIVA SE NORMALA POVRŠI S U TAČKI M. NJENA JEDNAČINA IMA OBLIK $X - X_0 / F'_X (X_0, Y_0) = Y - Y_0 / F'_Y (X_0, Y_0) = Z - Z_0 / -1$, ODNOSNO $X - X_0 / F'_X(M) = Y - Y_0 / F'_Y(M) = Z - Z_0 / F'_Z(M)$.

16) EKSTREMNE VREDNOSTI F- JA DVE PROMENLJIVE. TEOREMA: POTREBNI USLOVI ZA EGZISTENCIJU EKSTREMA. DA BI FUNKCIJA DVE PROMENLJIVE U NEKOJ TAČKI IMALA EKSTREMNU VREDNOST POTREBNO JE DA NJENI PARCIJALNI IZVODI BUDU JEDNAKI NULI. TEOREMA; NAKA JE A=

d

2

Z /

d

X

2

(X₀,Y₀), B=

d

2

Z /

d

X
 d
 $Y(X_0, Y_0), C =$
 d
 2
 $Z /$
 d
 Y
 2
 $(X_0, Y_0).$
 d
 $Z /$
 d
 $X(X_0, Y_0) = 0,$
 d
 $Z /$
 d
 $Y(X_0, Y_0) = 0,$
 D
 $= AC - B$
 2
 $,$
 D
 $>$
 $0, A$
 $<$
 0
 P
 $Z(X_0, Y_0)$ JE MAX,
 D
 $>$
 $0, A$
 $>$
 0
 P
 $Z(X_0, Y_0)$ JE MIN,
 D
 $= 0$, POTREBNA SU DODATNA ISPITIVANJA.

17) PRIMITIVNA F- JA I NEODREDJENI INTEGRAL. DEF: PRIMITIVNA F – JA F- JE F(X) JE

$F(x)$ TAKVA DA JE $F'(x) = F(x)$. TEOREMA: AKO JE $F(x)$ PRIMITIVNA F -JA ONDA JE TAKODJE $F(x) + C$ PRIMITIVNA F -JA. TEOREMA: AKO SU $F(x)$ I $G(x)$ PRIMITIVNE F -JE ZA ISTU F -JU TADA JE $F(x) - G(x) = C$. DEF: SKUP SVIH PRIMITIVNIH F -JA F -JE $F(x)$ ZOVE SE NEODREDJENI INTEGRAL I OZNAČAVA SE SA

$\int F(x) dx = F(x) + C$. TEOREMA: SVAKA NEPREKIDNA F -JA IMA NEODREDJENI INTEGRAL.

18) OSNOVNE OSOBINE NEODREDJENOG INTEGRALA. $(\int F(x) dx)' = F(x), \int F'(x)$

$dx = F(x) + C,$

$\int$

$[F(x) + G(x)$

$]$

$dx =$

$\int$

$F(x) dx +$

$\int$

$G(x) dx -$ ADITIVNOST,

$\int$

$K F(x) dx = K$

$\int$

$F(x) dx -$ HOMOGENOST,

$\int$

$\int$

$K \int F(x) dx =$

$\int$

$K \int$

$\int$

$F(x) dx$. ADITIVNOST I HOMOGENOST DAJU LINEARNOST.

19) INTEGRACIJA SMENOM PROMENLJIVIH I PARCIJALNA INTEGRACIJA. $\int$ SMENA:

$\int$

$F(G(x)) G'(x) dx =$

$\int$

F (U) DU – FORMULA, SMENA: $U = G(X)$, $DU = G'(X) DX$. PRIMER:

ò

SIN 2X DX=

ò

SIN T $\frac{1}{2}$ DT= $\frac{1}{2}$

ò

SINT DT = - $\frac{1}{2}$ COS T= - COS 2X/2 + C, SMENA :2X = T, 2DX = DT, DX = $\frac{1}{2}$ DT.

PARCIJALNA: DOKAZ: $(UV)' = U'V + UV'$

¤

ò

- INTEGRIRAMO,

ò

$(UV)' DX =$

ò

$U'V DX +$

ò

$UV' DX, UV =$

ò

$V DU +$

ò

$U DV,$

ò

$UDV = UV -$

ò

VDU . PRIMER:

ò

XE

x

$DX = XE$

x

-

ò

E

x

$DX = XE$

x

- E

x

$+ C = (X - 1) E$

x

$+ C, U = X, DU = DX, DV = E$

x

$DX, V = E$

x

.

20) INTEGRACIJA RACIONALNIH F- JA. 1) $\int (A_0 X^N + A_1 X^{N-1} + \dots + A_N) DX = A_0 (X^{N+1} / (N+1) + A$

$\frac{1}{N} (X^N / N) + \dots + A$

$X + C.$ 2)

$\int \frac{A}{(X - A)^N} DX = A$

$\int \frac{1}{(X - A)^N} DX = A$

$\int \frac{1}{(X - A)^N} DX = A$

$\int \frac{1}{U^N} DU = A$

$\int \frac{1}{U^N} DU = A$

$\int \frac{1}{U^N} DU = A (U^{-N+1} / (-N+1) + C = A ((X - A)^{-N+1} / (-N+1) + C = (-A / (N-1)) * (1 / (X - A)^{N-1}) + C.$

SMENA $U = X - A, DU = DX.$ 3)

$\int \frac{DX}{A(X - X_1)(X - X_2)} = \frac{A}{(X_1 - X_2)} \int \frac{1}{X - X_1} DX - \frac{A}{(X_2 - X_1)} \int \frac{1}{X - X_2} DX.$

AKO SU BROJEVI REALNI, I =

$\int \frac{A}{X - X_1} DX + \int \frac{B}{X - X_2} DX.$

21) INTEGRACIJA IRACIONALNIH I TRIG. FJA. NEKA JE R RACIONALNA FJA SVOJIH ARGUMENATA . INTEGRAL. $\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}) dx$

$ax + b, \dots$

n_k

$\int$

$ax + b) dx$, SMENOM $ax + b = z$

n

, GDE JE N NAJMANJI ZAJEDNIČKI SADRŽALAC BROJEVA $n_1, n_2, \dots, n_k$ SVODI SE NA N

z

z

$n-1$

$R(1/z)$

n

$-b/z$, z

m_1

$\dots, z$

m_k

) dz , $mi = N / ni, 1$

$\int$

i

$\int$

k . SLIČNO,

$\int$

$R(x,$

n_1

$\int$

$ax + b / cx + d, \dots$

n_k

$\int$

$ax + b / cx + d) dx$ SMENOM $ax + b / cx + d = z$

n

, GDE N IMA ISTO ZNAČENJE KAO U PRETHODNOM INTEGRALU, SVODI SE NA INTEGRACIJU RACIONALNE FJE.

INTEG. TRIG:

AKO JE PODINTEGRALNA FJA RACIONALNA PO $\sin x$ I $\cos x$, ONDA SE SMENOM $\tan x/2 = t$ PODINTEGRALNA FJA SVODI NA RACIONALNU FJU., A A KO JE NEPARNA PO $\cos x$, ONDA SE SMENOM $\sin x = t$ PODINTEGRALNI IZRAZ TRANSFORMIŠE U RACIONALNI IZRAZ PO t . A AKO JE NEPARNA PO $\sin x$, ONDA SMENA $\cos x = t$ SVODI INTEGRACIJU DATE FJE NA INTEGRACIJU RACIONALNE FJE PO t . A AKO JE PARN I

PO $\sin x$ I PO $\cos x$, ONDA SMENA $\tan x = t$ SVODI PODINTEGRALNU FJU NA RAC. FJU PO t . AKO JE PODINTEGRALNA FJA RAC PO $\tan x$, KORISTIMO SMENU $x = t$.

INTEGRALI OBLIKA

$$\int \sin^p x \cos^q x dx,$$

$$\int \sin^p x \cos^q x dx,$$

$$\int \cos^p x \cos^q x dx, p$$

Q, IZRAČUNAVAJU SE NA TAJ NAČIN ŠTO SE PROIZVOD TRIG FJA POD ZNAKOM INTEGRALA PRETHODNO TRANSFORMIŠE U ZBIR, NA OSNOVU POZNATIH OBRAZACA IZ TRIGONOMETRIJE.

22) DEF. I OSOBINE ODREDJENOG INTEGRALA. ZA FJU f OGRANIČENU SA SEGMENTU $[a, b]$, KAŽEMO DA JE INTEGRABILNA NA TOM SEGMENTU AKO POSTOJI GRANIČNA VREDNOST INTEGRALNE SUME

$$f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ KAD } \max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$$

0. OVA GRANIČNA VREDNOST NAZIVA SE ODREDJENI INTEGRAL FJE f NA $[a, b]$

I OZNAČAVA

$$\int_a^b f(x) dx. \text{ SEGMENT } [a, b]$$

JE OBLAST INTEGRACIJE, BROJ a DONJA, A BROJ b GORNJA GRANICA ODREDJENOG INTEGRALA, FJA f JE PODINTEGRALNA FJA. TEOREMA: AKO JE FJA f INTEGRABILNA NA SEGMENTU I , ONDA JE I

FJA
|
F

|
 INTEGRABILNA NA ISTOM SEGMENTU. TEOREMA: FJA F, NEPREKIDNA NA SEGMENTU I, INTEGRABILNA JE NA TOM SEGMENTU. TEOREMA: AKO JE FJA F OGRANIČENA NA SEGMENTU I I NA NJEMU IMA KONAČAN BROJ TAČAKA PREKIDA, ONDA JE ONA INTEGRABILNA NA TOM SEGMENTU.

OSOBINE INT:

ò

A
B

$$F(X) \, DX = 0,$$

ò

A
B

$$F(X) \, DX = -$$

ò

A
B

$$F(X) \, DX,$$

ò

A
B

$$F(X) \, DX =$$

ò

A
C

$$F(X) \, DX +$$

ò

C
A

$$F(X) \, DX.$$